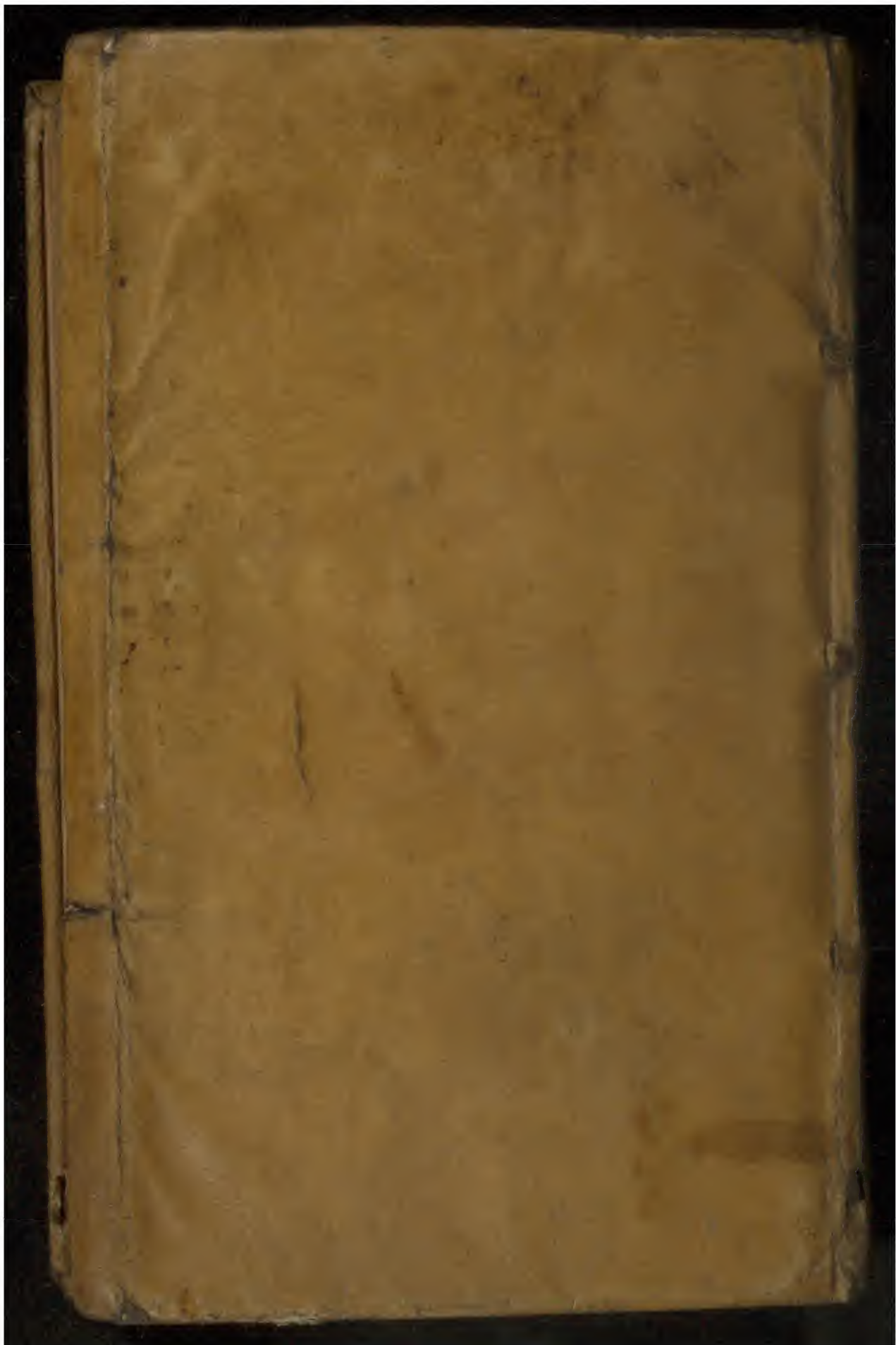






Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of The Wellcome Trust, London.
2082/A

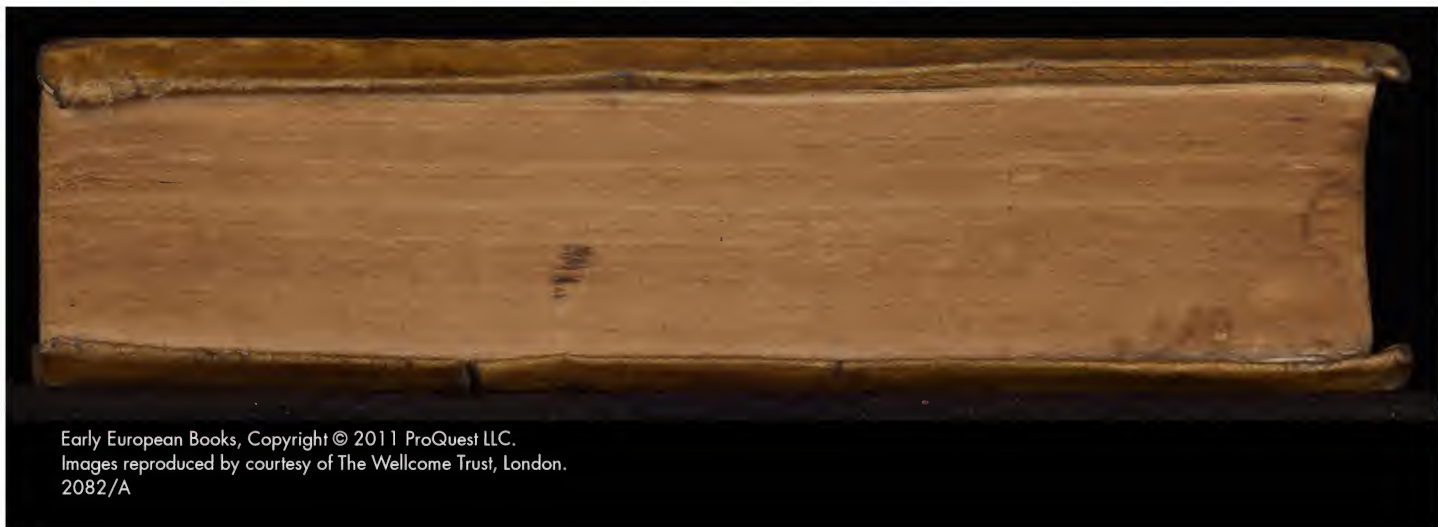




Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of The Wellcome Trust, London.
2082/A



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of The Wellcome Trust, London.
2082/A



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of The Wellcome Trust, London.
2082/A

2082/A

EVCLIDIS
ELEMENTO-
RUM

LIBRI XIII.

Succinctis & perspicuis demon-
strationibus compre-
hensi

à

M. AMBROSIO RHODIO
*Kembergense, Mathematicum Pro-
fessore extraordinario in
Academia Leucorea.*

Typis Gormanianis,
Impensis Pauli Helvvigij.

M. DC. IX.

p.

Facilis

Elemento

in

Libro

de



de

de

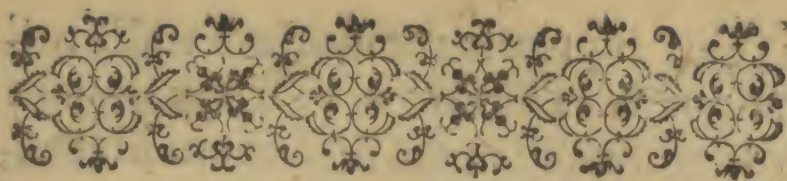
de

de

de

de

M. D. C. 17.




A D

*Serenissimum ac Potentissimum,
Principem ac Dominum.*

D N. CHRISTIA-
NUM II. DUCEM SAXONIAE,
SACRI ROM. IMP. ARCHIMAR-
schallum & Electorem, Landgravium
Thuringiae, Marchionem Misniae, Burg-
gravium Magdeburgensem; Dominum
suum Clementissimum.

M. AMBROSII RHODII Kembergensis
epistola dedicatoria.

UM IAM à MULTIS AN-
nis, Princeps Serenissime,
Domine Clementissime, non
in schola modò, quæ ad Mol-
dam est, Illustris; sed & Academia, quæ ul-
tra seculum floret ad Albin, cum multis
alijs Munificentiam Illustrissimæ Celaru-
dinis vestræ quasi ordinariam expertus
(:) 2 sum;

sim; ejus inprimis memoriam nulla mihi unquam ex animo eripiet ætas, quam pro diligentiore opera studiorum Mathematicorum culturæ impendenda, annis hæc proximis supra Academiæ seculum primum excurrentibus, paulò expertus sum largiorem. Hujus enim adminiculi ope, non modò academicam hanc vitam, quæ vel unica studijs urgendis optatissima videtur, continuare; verùm etiam de quamplurimis Academiæ civibus, quod citra jactantiam dictum velim, varias subinde Mathematicarum partes docendo, benè mereri mihi licuit. Cùm autem animo jam certò constituisssem, etiam ad penitiora harum disciplinarum, præcipuè verò Astronomiæ, Geographiæ & Chronologiæ sacra plures deducere; mearum quod partium, curæ etiam fuit maximæ, ut probè illi principijs tum Geometriæ, tum Arithmeticæ prius informarentur, per quæ veluti scalas duas, summa ima quævis in Mathematicarum amplissimo theatro attingere copia sit. Quod cū unus optimè præstet ipsa antiquitate, per tot jam iteratas imperiorum mutationes, singulari
Dei

DE I providentia, clarus Euclides, in suis
Elementis, quæ hæcenus ab alijs doctissi-
mis Viris sine imperfectione; imò cum a-
bundante perfectione edita sunt: à quo-
rum tamen lectione vel cognitione cari-
tas partim exemplarium, partim prolixi-
tas, quæ ingeniosis tædium, tardioribus e-
xiguum præstat commodum, multos de-
terrent; id inii consilium, ut, quantum
possem, Elementorum tamen probè con-
siderata natura & ingenio, ne vel neces-
saria deficerent, vel minus necessaria ab-
undarēt, Euclideæ Elementa cum suis de-
monstrationibus integra, sed forma qua-
dam contracta, precioq; exiguo redimen-
da ederem. Ita enim effecturum me spe-
ro, ut calami tædio, & tot literarum in de-
monstrationibus iterandarum scriptione,
devitato, intra paucas septimanas, solis o-
cularibus demonstrationibus crebrius re-
petitis, multa de Elementis hisce univer-
so studiorum ordini summopere necessa-
rijs, cognoscantur, quæ aliàs totidem mē-
sibus, & quod excurrit, vix perciperen-
tur. Huic verò operæ meæ, ut Illustrissima
vestra Celsitudo imprimis & maximè, se-
(:) 3 cundum

cundum Deum, favere, eamq; in tutelam
suam clementer suscipere velit, unicè mi-
hi exoranda videtur: Quod quidem
non impetraturum me modò spero; sed
planè jam impetratum, futurumque esse
confido, ut Clementiam illam pristinam
erga me majora atque majora subinde in-
crementa sumisse re ipsa experiar; & hoc
quasi stimulo incitatus, majori, si potero,
industria, hoc disciplinarum Mathemati-
carum studium decurrere & cōficere por-
rò etiam enitar. Hoc quidem certè ha-
beo polliceri, si quid benedictione divina
carius; valetudine optima acceptius; i-
psoq; divino favore gratius; id omne, ut
pro Illustrissima Cels. vestra, & inclyta
Domo Saxonica precibus à Deo æterno,
pijs impetretur, me vota cum alijs innu-
meris perpetuò conjuncturum. VVi-

tebergæ X. Calend. August,

ANNO M. D. CIX.

AD

A D

M. AMBROSIUM

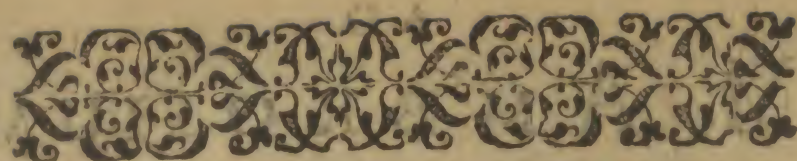
RHODIUM, Nepotem ex
sorore cariss.

CVM sic ingenium noctesq, diesq, fatiget,
Et sit magnarum nada MATHESIS opum:
Esse aliquem res mira, sui qui prodigus, avum
In sterili, ut vulgus judicat, arte terat.
Verum animam ceu nemo suam videt: Haud secus, alter
Gaudia quæ capiat pectore, nemo videt.
Hic tabula intentus querit, num pranderit! urbem.
Non sentit, formans pulvere signa, capi.
Alter, jò reperi! geminat, nudusq, per urbem.
Evolat inventi cæcus amore novi.
Nobile qui tandem effinxit diagramma, Camoenis
Offert, mactato pinguis sacra bove.
Eas modò sit Phœbi speciem sibi cernere, flamma
Haud neget hic uri cum Phaëthonte pari.
Hoc igitur felix in aspectabile mentis
Delicium RHODI præmia summa putas:
Dum vigil EUCLIDIS tractas ELEMENTA, beatè
Ingenijq, penu divite promiss opes.
Præmia jam studij capis haud spernenda: sed olim
Majora à grata posteritate feres.

Johannes VVanckelius,
Hist. P. P.

(:)

IN



In

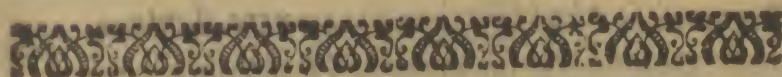
AMBROSII RHODII
Mathematici

Elementa Euclidea.

HOc erat insignem Rhodijs spirare colossū,
Hoc dignum ambrosio nomine pignus
EVLIDI lucere facem, lucere iuventæ (erat.
Recta Euclidean vadere scire vias.
En Rhodus, en saltus: hoc auspicio Harpocrateū
Posse timere senem Leucoris alma nequis,

Adamus Theod.

Adami F. Siberus.



A D

M. AMBROSIUM RHODIUM
Saxonem,

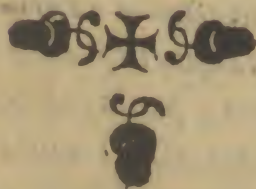
EUCLIDIS GEOMETRIAM
illustrantem.

DOCTI pulveris Hercules, an Hermes?
EUCLIDES, per & has Scholas & istas

Illo &

Non tamen teritur manūq; lota.
 Et hac sacra Matheseos adaque
 Omnes scire putant. Sciuntne, RHODI?
 Tu scis, optime mystagoga, tu scis.
 Qui tendit moderamen arripendi,
 Non statim bonus agrimensor idem est.
 Plus est esse Geometren: & hoc plus
 EUCLIDEM simile. Nunc ut omnem
 Euclidis Genium adsequantur omnes,
 DEMONSTRATIO LINEALIS exstat.
 Auctor RHODIUS est. Catum hoc alumni
 Acumen tibi gratulare, Saxo.
 EUCLIDES tenebris opertus, et quid
 Euclides mihi sit? profecto non est.
 Quem nunc RHODIA lucubrat: etas
 EUCLIDES tibi LUCULENTUS esto.

Frid. Taubmanus.



(:) S

DE

DE ELEMEN- TIS EUCLIDIS PRÆFATIO.



*Q*UOD in plerisq; rebus usis
venire solet, ut nullum simul opus &
inceptum & perfectum sit, sive quodd
dies diem docet; sive quodd oculi plus
vident quàm oculus; sive quodd Deus
ipse Sapiencia suæ semina in homines
ita dispergit, ut accrementa in altis magis juvet & pro-
moveat; idem cùm in universa Philosophia, tum vel ma-
ximè in Mathematicis observare licet. Sicut enim in il-
la primitus tantum non infinita, eaq; absurdissima à va-
rijs Sophistis disseminata erant opiniones, quas tandem
Plato & Aristoteles messe felice pre omnes collegerunt, re-
sectisq; & rejectis, ingenij pariter & judicij acie mira,
tum absurditatibus, tum vanitatibus, integrum & per-
fectum quoddam Philosophia corpus relinquere posteritati
voluerunt: Ita etiam olim, cùm maximo essent in pre-
cio studia mathematica; varia à varijs erāt inventa theo-
remata & problemata, quæ tandem nacta sunt Geometra
acutissimum Euclidem, paulò post obitum quod vero si-
mile videtur, Alexandri M. qui omnia illa cum suis princi-
pijs collegit, elegantissimoq; disposuit ordine, & eruditio-
ne tanta contexuit, ut Aristarcho nullo indignisset, nisi
communi quodam præstantissimorum virorum fato & ipse
illo carcere nequisset. Nam quod Euclides adificium Sphæ-
ricum,

N
rtum, proportionē elegantissima, mirabili corporum quin-
que Regularium inscriptione exornat, & multorum
jam seculorum atatem tulerat; id anatomia synta-
xiq, nova, in Hortum quendam, unumquodq, suo con-
venienti loco reponens, ut velle videtur, permulavit, ex-
clusis multis ignorantie mirum in modum medentibus,
herbis. Quā Horti illius amantem labilem præterimus,
& cum magnis illis Geometris, Archimede, Apollonio Pap-
po, Sereno, Hypsile, Ptolemaeo, Copernico alijsq, innume-
ris, ædificij hujus Euclidei commoditatibus fruimur, quod
nos contra omnis generis tempestates tueri potest, quovis
& anni & ætatis tempore. Caterum ELEMENTO-
RUM hoc nomen jure sibi vindicat hic tractatus, quod
consideratio omnium, ad aliorum, per universam Ma-
thesin, pertransit scientiam, ex quibus dubiorum, quæ
in ipsis contingunt, succurrit nobis solutio; sine quibus quàm
impudenter aliquis adibit scientias mathematicas, tam
infelicitè easdem tractabit. Neq, ulla deest ipsi conditio-
num, quæ in Elementis reperiri solet. Supervacuum enim
omne, tanquam impedimentum est sublatum; eliguntur
cuncta, quæ propositum continent & concludunt; diluci-
ditatis ac brevitatæ cura habetur maxima, ne contraria
perturbent cogitationem: Deniq, etiam universalis
theorematum in terminis comprehensio suum hîc lo-
cum invenit; nam quævis cognitio incomprehensibilis effi-
citur ijs, quæ doctrinam in particularia frustra diffecant.

Ordine autem hoc pulcherrimo procedit Euclides.
Cum Geometria maxime occupetur, ut Proclus ait, in fi-
gurarum contemplatione, quæ vel planæ vel solide sunt?
Linearum enim, tanquam terminorum, non requirebatur
peculiaris

peculiaris consideratio : de planis quidem Libris sex prioribus ; de Solidis in tribus ultimis agere voluit. Caterum, ne imperfecta esset illa Stereometria, quam plurimum iuvat notitia linearum Commensurabilium & incommensurabilium, tribus illis præmisit decimum, in quo copiosè de illis differit. Tandem neq³ hæc quidem tractatio in se perfecta esse poterat absq³ numerorum notitia ; ideoq³ ipsorum quoq³ affectiones tribus, decimum præcedentibus libris demonstrare abundè voluit. Sunt itaq³ veluti quatuor principalia Elementorum Euclideanorum membra, quorum primum est Geometricum, quatuor quidem prioribus libris absolutam figurarum contemplationem absolvens, quinto proportionales magnitudinū in genere persequens ; sexto proportionales figurarum planarum inter se exponens. Secundum Arithmeticum, tribus libris, numerorum, quibus cum magnitudinibus, tanquam binis omnium quantitarum radicibus, magna intercedit communio & societas, demonstrans affectiones proposito sufficientes. Tertium quasi mixtum de lineis commensurabilibus & incommensurabilibus agit, quarum natura maximè in numeris evidens est, ususq³ maximus & necessarius ad rectè percipiendas proportionales laterum in quinque corporibus regularibus, plerūq³ incommensurabilium. Quartū Stereometricum scientiam tradit Solidorum, quæ præcipuè corporum affectiones demonstrantur, in primis autem quinq³ corporum regularium Sphæræ inscribendorum constructio, & mutua proportio ; unde tandem elegantissimum illud Mathematicum ædificium constat, quod propositione ultima libri decimitertij absolvitur. Possunt quidè de Corporibus plura, eaq³ jucundissima demonstrari, ut ex libris illis tribus, decimum tertium sequentibus.

bus, qui Euclidean vulgò solent addi, perspicuum est, quibus
Doctissimus Clavius magnam operam, magnumq; laborem
impendit: Caterum Euclidean tredecim nobis pro nostro in-
stituto sufficiant, quibus cognitis, qui sese totos huic studio
sunt tradituri, non Campanum modò & Clavium; sed
quosvis alios nobiliores Geometras magno cum fructu le-
gent, intelligent. Ut autem quatuor operis Euclidean no-
stri posuimus membra; ita, singulis illis sua propria pra-
mittuntur principia, ex quibus demonstrationum omnium
mathematicarum longè accuratissimarum, certissima-
rumq; robur ac firmamentum nascitur. Suntq; principio-
rũ tria genera: primum Definitiones seu Hypotheses, qui-
bus explicantur vocabula artis, ne qua nominum ambi-
guitate vel obscuritate circumventi, paralogismos incur-
ramus; & has unumquodq; illorum membrorum habet
peculiares. Deinde sunt ~~aripara~~ seu postulata, quae a-
deò sunt clara & perspicua in subjecta scientia, ut nulla in-
digeant confirmatione, sed nudum auditoris assensum re-
quirunt, ne in demonstrando ulla vel hesitatio vel difficul-
tas oborlatur. Deniq; sunt Communes notiones, seu A-
xiomata & dignitates, quae non in hac tantum, sed in o-
mnibus aliis Scientiis ita sunt manifestae, ut nemo non ul-
trò assensum addat, qui tantum vocabula intelligit. Ex
hiscè principiis constituuntur & demonstrantur duplices
propositiones; Problematæ, in quibus ponitur aliquid, quod
non est, constituendum: & Theoremata, in quibus a-
liquid vel inesse vel non inesse constituta quantitati de-
monstratur. Differuntq; 1. fine; illorum enim est con-
structio, horum cognitio, quod etiam clausula distincta in-
dicare solemus; Quod erat faciendum, in illis; Quod e-
rat

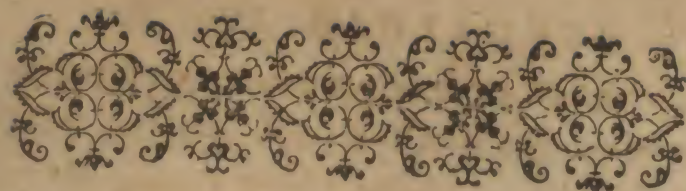
rat ostendendū, in his. 2 Vsu: illa enim Mechanicis, hæc de-
 monstrationibus inserviunt. 3. Accidentibus, quæ in illis
 non sunt perpetua, nec perpetuo comitantur sua subjecta;
 quia viciosa potest esse constructio; in his verò semper sunt
 eadem. Ipsæ Demonstrationes sex absolvuntur partibus.
 Prima πρότασις est generalis propositio demonstrationis,
 quæ monet, quibus positis & concessis, quæ quæsitæ sint de-
 monstranda. Hæc si theorema sit, habet duas partes, ὑπό-
 θέσις & πρότερον: Sin problema, δεδομένον, quod consti-
 tuit subjectum, de quo aliquid affirmatur vel negatur;
 vel quomocumq; queritur; & ζητέμενον, quod ostendit,
 quid in subjecto sit demonstrandum. Secunda est ἐκδοσις
 expositio seu declaratio dati vel antecedentis, quæ datum
 seorsim repetit & explicat: Sicut tertia διόρισμός quæsi-
 tum; quam utramq; partem commodissimè exhibent li-
 teræ contextui propositionum insertæ, sed formæ distinctæ,
 citra ullam cursus propositionum confusionem. Quarta
 constructio κατασκευὴ seu delineatio, quæ præparat & ac-
 commodat ea, quæ ad demonstrationem accidentium dati
 requiruntur & necessaria sunt. Quinta, ἐκδοσις quæ-
 sitæ demonstratio, quæ per prima, nota & concessa,
 vel etiam antè demonstrata demonstrat id, quod de da-
 to ostendendum est. Et hæc progressum observat duplicem.
 Vel enim à principijs natura notis, ut sunt definitiones,
 postulata & axiomata, vel etiam antea demonstratis,
 quæ & ipsa ad principia possunt reduci, procedimus, quæ
 Methodus συνθετικὴ dicitur; vel procedimus à quæsito &
 posteriore ad prius & principia, quæ vel est ἀναλυτικὴ τῶν ἀρχῶν
 & ἀπὸ τοῦ ἀποδείξεως ἀναλυτικὴ dicitur; vel ἀναλυτικὴ τῶν ἀρχῶν &
 ἀπαγωγὴ εἰς ἀδύνατον dicitur. Sexta συμπέρασμα quæ
 demon-

demonstrata ad propositionem refert, eamq; rectè de-
 monstratam esse affirmat. Propositionibus cognatum est
 λήμμα, quæ in Geometricis est propositio indigens proba-
 tione, acciditq; tum constructioni, tum demonstrationi,
 hoc differens à principijs, quòd hæc nulla indigent demon-
 stratione; illud autem demonstrari cum possit, absq; de-
 monstratione sumitur, ad aliorum faciendam fidem. Co-
 rollarium etiam theorema est, quod per se ex demonstra-
 tionibus propositionum sequitur, sine nova ac peculiari
 demonstratione. Hæc tanquam necessaria ad pleniorẽ
 cognitionem auctoris præmittenda mihi videbantur. Fru-
 galissimas itaq; hæc disciplinas, Geometriam & Arith-
 meticam, in hisce Elementis Euclideis exornatas, (quan-
 quam parùm πρὸς τὰ ἀλφῖτα facere censentur; ut &
 difficiles; sed illis, qui vel antè pronunciant, quàm
 inspiciant: vel priùs abijciunt studium, quàm periculum
 fecerint:) si quis impensius coluerit, ipso experietur opere,
 plus habuisse in recessu, quàm magnifica minus fronte pro-
 miserunt: in primis autem, si non Magnitudinum & Nu-
 merorum hæc Philosophia, veritatis quendam amorem in-
 generatum; at saltem divinitus innatum sibi confir-
 mari & cōservari percipiet; sentietq; quàm notabili fruge
 vegetior sibi reddatur, luxurietvè toris animosi pecto-
 ris ardor. Opere verò etiam experietur ipso, si qua-
 rûvis rerum fuerint expedienda dimensiones, veluti lon-
 gitudinum, latitudinum, planicierum, agrorum, insula-
 rum; altitudines turrium, montium; cœlestia φαινόμενα
 per instrumenta accuratè observanda & examinanda;
 horologia sciōterica delineāda; machine variæ exstruēde,
 usur-

surpanda; ponderum rationes exponenda; phenomena
ex illuminatione diversa speculorum, picturarum aquae &
aeris excusanda; Deniq; sive speculationibus indulgere ve-
lit caelestibus, sive elementaribus quae a viis uidentur non se-
ruunt, quanto & incitamento & adjumento, addo et-
iam complemento haec elementa sine
futura.



EUCI-



EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER PRIMUS.

Definitiones.

I.

Punctum est, cuius
pars nulla est, id est, pun-
ctum est quiddam indivi-
sibile, quod mente tan-
tum concipitur. *Non enim punctum
est quantitas, sed omnium quantitarum
continuarum principium, quæ potentia
in infinitum sunt divisibiles. Illud au-
tem quod creta pingitur punctum, Phy-
sicum, non mathematicum est, quippe
non omni carens latitudine, quo interim
facilioris doctrinæ gratia utimur.*

A

2. Linea

2. Linea est longitudo latitudinis expers, seu, ut Gellius loquitur, Longitudo illatabilis. *Hæc prima species est quantitatum continuarum duntaxat longa.*

3. Termini linearum sunt puncta: actu quidem in linea recta terminata; in peripheria circuli potentia.

4. Recta linea est, quæ ex æquo sua interjacet puncta, id est, in qua nihil flexuosum reperitur. *Archimedes brevissimam esse dicit earum, quæ eosdem habent terminos: vel est brevissima à puncto ad punctum extensio.*

5. Superficies est, quæ longitudinem latitudinemque tantum habet. *Hæc secunda magnitudinum species est, quæ præter dimensionem, quam secundum longum communem habet cum linea, etiam secundum latitudinem mensurabilis est; omni tamen mensura in profundum destituta.*

6. Super-

6. Superficiei extrema sunt lineæ. Sic trilatera figura tribus, quadrilatera quatuor, multilatera multis terminantur lineis; Circulus una.

7. Plana superficies est, quæ ex æquo suas interjacet lineas. Estque omnium, quæ eadem habent extrema, & minima & brevissima.

8. Planus angulus est linearum in plano se mutuò tangentium & non in directum jacentium, alterius ad alterum inclinatio. Iacentes enim in directum lineæ, si protrahantur, nunquam concurrunt, ita ut se secent protractæ & sic angulos non efficiunt.

9. Rectilineus est angulus, cum, quæ angulum continent lineæ, sunt rectæ. Curvilineus autem, qui ex duabus curvis: mixtus qui ex una curva & altera recta.

10. Cum recta linea super rectam consistens lineam, eos, qui sunt de-

A 2

incept,



incept, angulos aec , ce
 b æquales inter se fece-
 rit; rectus est uterq; an-
 gulorum: & quæ insistit,
 nea ce , perpendicularis vocatur e-
 jus, cui insistit.

11. Angulus obtusus est aed , qui
 recto major est;

12. Angulus autem acutus bed ,
 qui recto minor.

13. Terminus est, quod alicujus
 extremum est. Sic puncta linearum, li-
 neæ superficierum; superficies corporum
 sunt termini. Corpora verò, quia ab alia
 quantitate nulla dimensione superantur,
 nullius etiam termini esse possunt.

14. Figura est, quæ sub aliquo vel
 aliquibus terminis comprehenditur.
 Ita videlicet, ut circumquaque illis ter-
 minis claudatur.

15. Circulus est figura plana, sub
 una linea comprehensa, quæ peri-
 pheria appellatur, ad quam ab uno
 puncto eorum, quæ intra figuram
 sunt posita, cadentes omnes rectæ
 lineæ inter se sunt æquales.

16. Hoc

16. Hoc punctum centrum circuli appellatur.

17. Diameter circuli est recta quædam linea per centrum ducta, & ex utraq; parte in peripheriam terminata, quæ circulū bifariam secat, & totum planum contentum peripheria, & ipsam peripheriam in partes æquales, cum nulla alteram excedat.

18. Semicirculus est figura, quæ continetur sub diametro & sub ea linea, quæ de circuli peripheria auferitur, *id est, semiperipheria.*

19. Figuræ rectilineæ sunt, quæ sub rectis lineis continentur. *Ideoque curvilineæ erunt, quæ curvis; & mixtæ, quæ mixtis lineis continentur.*

20. Trilateræ quæ sub tribus.

21. Quadrilateræ, quæ sub quatuor.

22. Multilateræ, quæ sub pluribus, quàm quatuor rectis lineis comprehenduntur.

23. Trilaterarum figurarum æquilaterum est triangulum, quod tria
A 3 latera

latera habet æqualia. *Duplicem habet divisionem triangulorum, alteram ex lateribus, alteram ex angulis.*

24. Isosceles est, quod duo tantum æqualia habet latera; *tertio vel majore vel minore.*

25. Scalenum est, quod tria inæqualia habet latera.

26. Adhæc etiam trilaterarum figurarum, rectangulum, quidem est triangulum quod rectum habet angulum: *sive illud sit Isosceles sive scalenum.*

27. Amblygonium, quod obtusum habet angulum; *itidem vel isosceles vel scalenum.*

28. Oxygonium, quod tres habet acutos angulos. *Estq; vel æquilaterum, vel Isosceles, vel scalenum.*

29. Quadrilaterarum figurarum, Quadratum est, quod & æquilaterum est, & æquiangulum.

30. Altera parte longior figura est, quæ rectangula quidem est, sed non æqui-

æquilatera. Habet enim tantum duo opposita latera equalia. Alij oblongum: alij rectangulum vertunt.

31. Rhombus, quæ æquilatera, sed rectangula non est. Sunt enim bini tantum oppositi anguli æquales.

32. Rhomboides, quæ adversa & latera & angulos habens inter se æquales, neque æquilatera est, neque rectangula. Opposita est quadrato omni ex parte.

33. Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ Trapezia appellantur. Vocantur irregulares, quoniam infinitis possunt variari modis. Estque Trapezium aliud Isosceles, quod duo latera opposita parallela, duo verò equalia: aliud scalenum, quod duo tantum opposita parallela habet. Trapezoiles, quod neque parallela, neque equalia habet latera.

34. Parallela rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint plano, & ex u-

A 4

traq;

traque parte in infinitum producuntur, in neutra sibi mutuo concurrunt.

35. Parallelogrammum est figura quadrilatera, cujus bina opposita latera sunt parallela seu æquidistantia. *Ut sunt quadrata, oblonga, Rhombus & Rhomboides.*

36. Cum verò in parallelogrammo diameter ducta fuerit, duæq; lineæ lateribus parallelæ, secantes diametrum in uno eodemque puncto, ita ut parallelogrammum ab hisce parallelis in quatuor distribuatur parallelogramma: Appellantur illa, per quæ diameter non transit, complementa: duo verò reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrum consistere dicuntur. *Vide proposition. 43.*

PETITIONES, SIVE
postulata.

1. Postuletur, ut à quovis puncto in quodvis punctum rectam lineam ducere concedatur.

2. Et

2. Et rectam lineam terminatam in continuum recta producere.
3. Quovis centro & intervallo circulum describere.

COMMUNES NOTIONES
*sive Axiomata, quæ & Pronunciata
 dici solent & dignitates.*

1. Quæ eidem æqualia, & inter se, sunt æqualia. Et quod uno æqualium majus est, aut minus, majus est aut minus altero æqualium. Et si unum æqualium majus est, aut minus aliqua magnitudine, alterum quoque æqualium eadem magnitudine majus est, aut minus.
2. Et si æqualibus æqualia adjecta sint, tota sunt æqualia.
3. Et si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur sunt æqualia.
4. Si inæqualibus æqualia adjecta sint, tota sunt inæqualia. Et si æqualibus inæqualia sint adjecta, majori
 A 5 majus,

majus & minori minus, tota sunt inæqualia, illud nimirum majus, & hoc minus.

5. Et si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia. Et si ab inæqualibus inæqualia ablata sint, à majori minus, & à minori majus, reliqua sunt inæqualia, illud nimirum majus, & hoc minus.

6. Quæ ejusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia. Et quod unius æqualium duplum est, duplum est & alterius æqualium. *Idem intelligendum est de triplo & quadruplo, & ceteris.*

7. Quæ ejusdem sunt dimidia, inter se sunt æqualia. Et contra quæ æqualia sunt, ejusdem sunt dimidia. *Pari ratione, quæ ejusdem sunt partes tertia vel quarta, &c. inter se sunt æquales.*

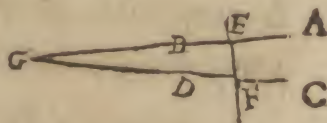
8. Quæ sibi mutuo congruunt, inter se sunt æqualia. *Intelligendum est axioma de magnitudinibus ejusdem speciei,*

ciei, quarum una superposita alteri, neutra alteram excedit. Sic linea lineæ congruens, eidem æqualis est, non autem applicari dicitur lineæ superficiæ. Neque tamen confundenda est ἐφαρµωσις hæc mathematica, cum applicatione Mechanica vel Physica.

9. Totum sua parte majus est. Aliàs ablata parte tolleretur totum.

10. Omnes anguli recti sunt inter se æquales. Quia latera sine inclinatione ulla sibi perpendiculariter insunt.

11. Si in duas rectas ab, cd , altera recta linea ef incidens, internos, ad easdem partes, angulos bef, dfe , duobus rectis minores faciat; duæ illæ rectæ li-



næ in infinitum productæ, sibi mutuò incident in g . ad eas partes, ubi sunt anguli, duobus rectis minores.

12. Duæ

12. Duæ rectæ lineæ spacium non comprehendunt. Si enim coëant in uno puncto ad efficiendum angulum, ex altera parte necessario magis ac magis disjungentur. Ad minimum ergo requiruntur lineæ tres rectæ ad simplicissimam figuram rectilineam constituendam.

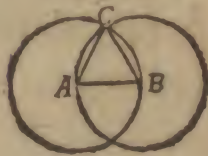
PROPOSITIO I.

Problema. 1.

Super data recta ab terminata, Triangulum æquilaterum abc construere.

Intervallo ab ex a & b describantur duo circuli, quorum interseçtio c con-

α 1. Postul.
 β 5. def: 1.
 γ 1. axiom.



nectatur cum a & b . Quoniam igitur eidem ab β æquales sunt bc & ac , erunt etiam inter se γ æquales, & triangulum abc æquilaterum. Quod erat faciendum.

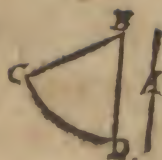
PROPOSITIO II.

Problema. 2.

Ad datum punctum b , data rectæ lineæ a , æqualem rectam bd ponere.

Inter-

Intervallo a lineæ α describa-
tur centro b circulus $c d$. Cum ergò
ipsi $b c$ sint æquales $\beta b d$ & γa .
Proinde ad punctū b posita $\beta b d$, e-
rit etiam ipsi $a d$ æqualis. Quod erat
faciendum.

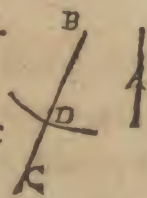


α Postul.
 β 15. def. 1.
 γ ex hyp:
 d 1. axio.

PROPOSITIO III.

Problema 3.

Duabus datis rectis inæquali-
bus; de maiore cb , minori
 a æqualem rectam db , ab-
scindere.



Centro b intervallo a α secetur c
 b in d , & erit db β æqualis ipsi a .

α 2. I.
 β 15. def. 1.

PROPOSITIO IV.

Theorema 1.

Si duo Triangula bcd , def , duo
latera bc , ed , duobus lateribus bd ,
 ef æqualia habeant, utrumq; utriq;
habeant verò & angulum cbd , an-
gulo, def æqualem, sub æqualibus
rectis lineis contentum: & basin cd
basi df , æqualem habebunt; eritque
Trian-

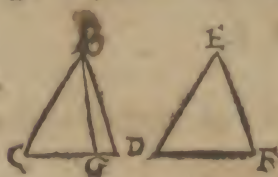


Triangulum cbd Triangulo def æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterq; utrique, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

3. 1.

Si basis cd est major, quàm basis df , & auferatur ex cd , cg æqualis ipsi df , & ducatur bg . Si jam bc , bg sunt æquales ipsis ed , ef , & basis cg , basi df ; non

9. axio.



erit tamen angulus $c b g$ angulo $c d e$ æqualis, defectu anguli $g b d$. Quod est contra hypothesein. Ideoq; si

8. axio.

tres termini Trianguli congruant tribus terminis alterius Trianguli applicati, reliquos reliquis etiam congruere, & totum toti æquale esse necessum est. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO V.

Theorema 2.

Isoſcelium Triangulorum abc , quia ad basin sunt anguli abc & acb , inter se sunt æquales: & productis æqualibus rectis ab , ac lineis, qui sub basi sunt anguli dbc & ecb , inter se sunt æquales.

Lateribm

Lateribus ab , ac æqualibus, æqualiter extendis in d & e , ducantur cd , be . Quoniam ergò in Triangulis dac & eab dantur duo latera, ad , ac æqualia duobus lateribus ae & ab , & angulus a utriq; communis; erit etiam basis be basis cd æqualis, & angulus d , angulo e , & angulus abc angulo acd . Rursus in Triangulis bdc & ceb æqualium laterum ce & bd , be & cd , & angulorum d ipsi e : erunt etiam anguli ecb , dbc sub basi æquales, sicut & $4. l.$ ebc & $dc b$ æquales, quibus ablati ab æqualibus abe & acd , reloquentur acb & abc anguli ad basin β æquales. Idem quoque de Triangulis æquilateris verum est. Vnde sequitur Triangula æquilatera etiam esse equiangula. $\beta 3. ax.$



PROPOSITIO VI.

Theorema 3.

Si Trianguli abc duo anguli b , c , æquales inter se fuerint, etiam sub æqualibus angulis subtensa latera ab & ac æqualia inter se erunt.

Conversa prioris.

Si quis neget, angulis b, c æqualibus æqualia opponi latera ab, ac ; dicat ab esse longius ac , cui æquale sit db ex ab β abscissum. Ducta linea $\beta 3. l.$ dc ;

EVCLIDIS ELEM:

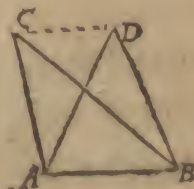
 γ ex dato. δ 4. l. ϵ . 9. ax.

dc : in Triangulis acb & dbc propter latera equalia, ac ipsi d, b & b, c commune; angulumq; b angulo c equalem: necessario etiam bases dc, ab erunt & aequales, & totum Triangulum acb , toti $dc b$, pars toti, quod est impossibile.

PROPOSITIO VII.

Theorema 4.

Super eadem recta ab duabus eisdem rectis ac, bc aliae duae rectae ad, bd aequales, utraq; utriq; non constituentur ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, *supra vel infra*, eodemq; terminos a & b , cum duabus ac, bc initio ductis habentes.

 ϵ ex hyp. β 5. l. γ 9. ax.

Constituantur, si potest, ad aliud punctum d aliae duae rectae prioribus aequales ad ipsi ac & bd ipsi bc , & conectantur puncta dc .
 Erunt Triangulorum α Isoscelium acd & bdc β aequales anguli ad basin acd ipsi, ad & bd ipsi bcd . Vnde fit, ut, quia acd aequalis est partiali adc , quo major totalis bdc aequalis est partiali bcd , totus acd fiat partiali bcd minor. Quod γ absurdum.

PRO-

PROPOSITIO IIX.

Theorema 5.

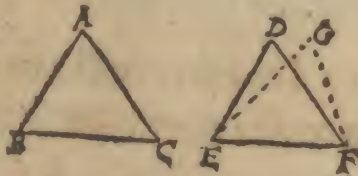
Si duo Triangula abc, def , duo latera ab, ac , duobus lateribus de, df , utrumque utrique æqualia; habuerint verò & basin bc basi ef æqualem; angulum quoque a sub æqualibus rectis lineis contentum, angulo d æqualem habebunt.

Convertit primam partem propositionis 4.

Quando latera singula singulis, basiꝝ, basis applicata conveniunt, "

convenire etiam totum Triangulum toti oportet & angulum a , angulo d .

Nisi enim a cadat in d , sed in g , super eadem linea ef , duabus eisdem rectis de, df , alie duæ rectæ æquales eg, gf utraq; utriq; ad eandem partem, eosdemq; terminos constituentur. Quod est β impossibile.



æ 8. axiom.

β 7. 1.

PROPOSITIO IX.

Problema 4.

Datum angulum bac rectilinum b fariam secare.

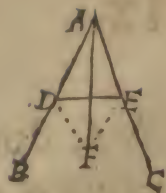
Ex ab abscindatur ad , pro libitu assumpta ac æqualis; atq; ad ductam lineam dc β ponatur

æ 3. 1.

β 1. 1.

B

tur

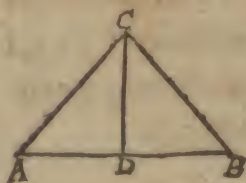
γ ex constr. δ 8. 1.

tur Triangulum æquilaterum, vel etiam Isosceles dfe , & connectantur af . Erunt in Triangulis daf & caf γ equalium laterum ad ipsi ac , & af communi, & basiū df, ef ; anguli daf & caf δ æquales, sectusq; angulus a in duos æquales angulos. Sed in praxi sufficit in utraque parte punctum supremum f per occultam intersectionem arcuum notasse.

PROPOSITIO X.

Problema 5.

Datam rectam finitam ab , bifariam secare.

 α 1. 1. β 9. 1. γ ex constr. δ 4. 1.

Super data recta ab α constituti trianguli abc angulum c β bisecans linea cd , bisecat & ab lineam datam in d . Quia enim in triangulis acd & bcd γ equalia sunt latera ac & bc , cd verò commune, & anguli comprehensi β æquales; erunt & bases ad & db δ æquales; & recta ab in d bifariam secta.

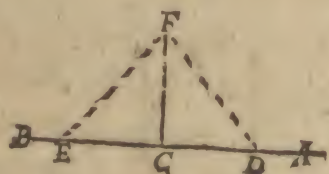
PROPOSITIO XI.

Problema 6.

Data

Data recta ab , à puncto c in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

Puncto c impositus circinus utring³ trāserat æquales partes cd , ce , ac super tota dea constituatur Triangulum vel æquilaterum vel isosceles def , ducaturq³ fc . Iterū propter latera cd , ce β æqualia & cf commune; & bases df , ef æquales, & æquales sunt anguli ad c contigui, id est, recti, & fc d perpendicularis ex puncto c erecta.



α 1. l.

β ex constr.

γ 8. l.

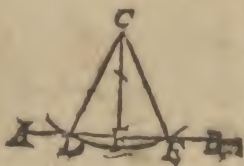
δ 10. def. 1.

PROPOSITIO XII.

Problema 7.

Super datam rectam infinitam ab , à dato puncto c , quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

Ex centro c arcus circuli interfecet ab in d & e α dividatur bisariam in f , erit fc β perpendicularis: uterque enim ad f contiguus est, & æqualis seu rect⁹, propter latera fd , fe æqualia & fc commune, propterq³ bases dc , ce d æquales.



α 10. l.

β 10. def. 1.

γ 3. l.

δ 15. def. 1.

B 2

PRO-

EVCLIDIS ELEM:
PROPOSITIO XIII.

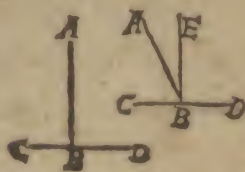
Theorema 6.

Utut recta $a b$ super rectam $c d$ consistens, angulos faciat; aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

¶ 10. def. 1.

¶ 11. 1.

¶ 8. ax.



In perpendiculariter insistentibus, $e b$ nimirum ipsi $c d$ res est & manifesta. Sed si $a b$ non sit perpendicularis, ex puncto b erecta perpendiculari $b e$, videmus angulos $a b c$ & $a b d$ simul sumtos tantundem occupare spacij, quantum duo recti $e b c$; & $e b d$ atq; mutuo & congruere.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 7.

Si ad aliquam rectam $a b$ atque ad punctum c in ea, duæ rectæ $c d$ & $c e$ non ad easdem partes ductæ d vel e , eos qui sunt deinceps angulos $a c d$, $a c e$, duobus rectis æquales fecerint, in directum erunt inter se ipsæ & eadæ lineæ $c d$, $c e$, seu recta una.

¶ 13. 1.



Si $d c e$ non est recta una, esto $d c f$. In hanc ergo rectam incidens recta $a c$, faciet duos angulos duobus rectis & æquales $a c d$ &

& acf. Erant autem & acd & ac e β *equales* β ex hypot: duobus rectis. Ablato itaq; communi acd, & *equa-* γ 3. axiom. les relinquentur acf, ac e minor majori, vel pars toti. Quod absurdum.

PROPOSITIO XV.

Theorema 8.

Si duæ rectæ ab & cd se invicem fecuerint, angulos ad verticem: inter se æquales efficient.

Sunt enim a e c & a e d duobus rectis = *equales*. Sunt item a e d & d e b duobus rectis *equales*. Ablato ergo communi a e d, β relinquentur a e c & d e b *equales*, anguli ad verticem.

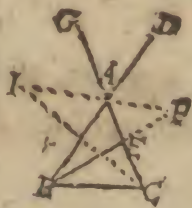
 α 13. l. β 3. axiom.

PROPOSITIO XVI.

Theorema 9.

Omnis Trianguli abc uno latere b a producto externus angulus dac utroq; interno, tam acb, quàm abc, & opposito major est.

α Dividatur ac bisariam in e; & ducta recta, b e β continuetur *equalis* usq; in f; conjungaturq; a f. Iam in Triangulis ceb & aef latera ca & ec, eb & ef sunt & *equalia*; δ anguliq; aef & bec.

 α 10. l. β 3. l. γ ex condit. δ 13. l. ϵ 4. l.

B 3

Ergo

4. 1. Ergo & totum triangulum toti erit ϵ *equale*, & angulus $e c b$ ipsi $e a f$, quo tanquam parte externo totus $c a d$ est major.

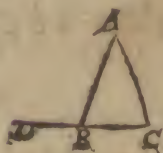
Ita pro angulo $a b c$ & dividatur latus $a b$ bisariam, & recta $e h$ in continuum abscindatur β *equalis* $h i$, connectaturq; $i a$. Rursum in Triangulis $ch b$ & $a h i$ γ *equalia* sunt latera $a h$ & $h b$, $h c$ & $h i$, & angulique $ch b$ & $a h i$. Totum ergo triangulum toti est ϵ *equale*, & angulus $i a h$ ipsi $h b c$, cui *equalium* duorum ad verticem alter $d a f$ tanquam pars minor est toto externo $c a d$.

PROPOSITIO XVII.

Theorema 10.

Omnis Trianguli $a b c$ duo anguli, duobus rectis sunt minores, quomodocunque sumti.

α 16. 1.
 β 4. axio.



γ 13. 1.

Pro ducto latere $c b$, angulus externus $a b d$ α *major* est interno opposito $a c b$. Si utrique jungatur angulus communis $a b c$, β *maiores* erunt $a b c$, $a b d$ ceu duobus rectis γ *equales*, quàm interni duo $a b c$ & $a c b$. Itaq; *minores* sunt duobus rectis.

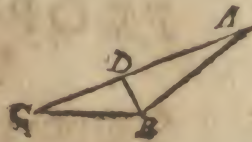
PRO.

PROPOS: XIIX.

Theorema 11.

Omnis trianguli abc majus latus ac majorem angulum abc subtendit.

α Abscindatur ex a ipsi ab equalis ad & α 3. l.
 ducatur bd . In triangulo β Isosceli ergo β ex constr.
 bad , anguli abd & adb γ 5. l.
 sunt & *equales*. Sed hic tanquam *externus* d major est interno opposito bcd . Ergo et abd . Eius autem *totius* abc multo d 16. l.
 erit major. Idem demonstratur eodem modo de altero angulo a .

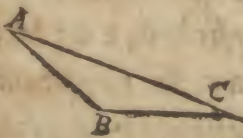


PROPOS: XIX.

Theorema 12.

Omnis trianguli abc major angulus b majori lateri ac subtenditur.

Sin minus, esset latus ac vel *equale* lateri ab ,
 & sic anguli c & b essent α *equales* contra datum: α 5. l.
 aut minus, atque sic oporteret ac β ex hyp.
 tanquam latus minus β majorem γ 18. l.
 angulum b subtendere, latusq;
 majus ab , minorem c . Quod &
 absurdum.



B 4

PRO.

EVCLIDIS ELEMENT:
PROPOSITIO XX.

Theorema 13.

Omnis trianguli abc duo latera
 ab, ac , reliquo bc sunt
majora, quomodocun-
que sumta.



*Est enim bc inter b & c
omnium a brevissima.*

a 4. def. 1.

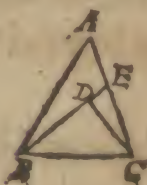
PROPOSITIO XXI.

Theorema 14.

Si super trianguli abc uno latere
 bc , ab extremitatibus, duæ rectæ bd ,
 cd , interius constitutæ fuerint; hæ
constitutæ reliquis trianguli duobus
lateribus ba, ca minores quidem e-
runt, majorem verò angulum d con-
tinebunt.

a 20. l.

β 4. axiom.



*Pro ducto latere bd in e , in
triangulo bae , latera ba, ae si-
mul a majora sunt tertio be , addi-
to q_3 ec communi, ba, ac β majora
erunt be, ec simul sumtis: a ita &*

*ce, ed quàm dc , sic bd, dc simul β minores i-
pſis be, ec : Ideo q_3 & minores sunt majoribus $ba,$
 ac . Sic tanquam externus d angulus γ major est
angulo e interno opposito; & hic itidem tanquam
externus interno a : itaq; γ d major est ipſo a .*

γ 16. l.

P R O.

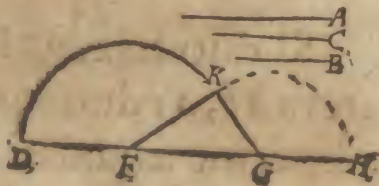
PROPOSITIO XXII.

Problema 8.

Ex tribus rectis lineis fg , fk , kg , quæ sunt datis tribus, abc , æquales, triangulum $fk g$ constituere. Oportet autem duas reliqua esse majores omnifariam sumtas: quoniam unuscujusque trianguli duo latera quomodocunq; sumta reliquo sunt majora.

Data æquali fg utrinque apponantur in directum fd & gh æquales ipsis b & c , & illarum intervallo descriptorum circularum intersectio k cum g & f connexa,

exhibet triangulum $fk g$, cujus latera datis tribus rectis sunt æqualia. In



praxi sufficit tantum ad tertia lineæ extremitates d & h ex constr. & 15. def. 1. intervallo reliquarum duarum intersectionem notasse, eamq; cum illis extremitatibus copulasse per rectas.

PROPOSITIO XXIII.

Problema 9.

Ad datam rectam ab , datumque in ea punctum c , dato angulo rectilineo

B 5

lineo

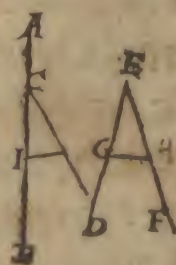
lineo def , æqualem angulum ick rectilineum constituere.

In lineis ed , ef angulum datum e includentibus sumta duo puncta pro libitu g & h connectantur, ipsiq; cg æqualis in ab fiat ci , cui a accommodentur duæ reliquæ gh seu ik , & eh seu kc . Erit ick suis lateribus & basi β æquale triangulo geh , & ad punctum c factus angulus γ æqualis angulo e .

α 22. l.

β ex constr.

γ 8. l.



PROPOS: XXIV.

Theorema 15.

Si duo triangula abc , def duo latera ab , ac duobus lateribus de , df habuerint æqualia, utrumq; utriq; angulum a verò angulo d majorem, sub æqualibus rectis lineis contentum: & basin bc , basi ef majorem habebunt.

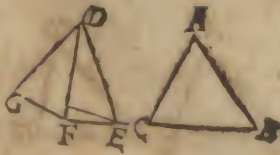
α 23. l.

β ex constr.

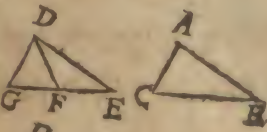
γ 4. l.

α Fiat ad punctum d angulo a æqualis, ut latus dg sit β æquale lateri df , cadetq; c g vel in ef vel supra, vel infra eam. Si supra ipsam, in Triangulis bac & edg propter æqualia latera ba , ed & ac , dg , & angulos a & d ; erunt & bases bc , eg γ æquales. Et in triangulo Isosceli egf ,

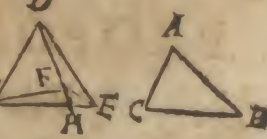
egf, anguli ad basin d g f & d f g erunt δ æquales: Quo angulo d g f cum minor sit, egf, angulo autē d f g maior efg, utique minori e g f minus latus ef, & majori efg majus latus eg: subtenditur, id est, huic æqualis bc basis major erit basi ef. Sic in ipsam, necessariò eg γ æ.



δ 5. 1.



19. 1.



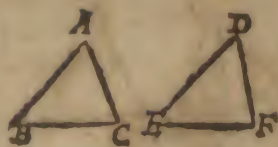
qualis ipsi bc, & major est basi ef. Denique si infra; productis df in h, & dg in i, ductaq; eg: δ 5. axio. erit rursus eg basis γ æqualis basi bc; angulus item hfg δ æqualis angulo fgi, quo sanè δ minor est egf, adeoq; & angulo efg. Ideoq; angulo efg adhuc majori majus latus eb subtendetur quod æquale est ipsi bc, quàm angulo egf, quod est ef. Sic patet propositum.

PROPOS: XXV.

Theorema 16.

Si duo triangula *abc*, *def*, duo latera *ab*, *ac*, duobus lateribus *de*, *df* æqualia habuerint, utrumq; utrique: basin vero *bc* basi *ef* majorem, & angulum *a* sub æqualibus rectis contentum, angulo *d* majorem habebant.

Sin



Sin minus, erit vel æqualis, atque sic contra hypothesin etiam bases bc , ef erunt æquales: vel major

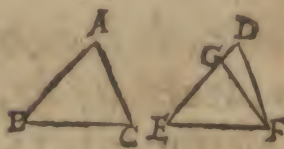
*α 4. l.
β 24. l.*

d ipso a, atque sic basis ef basi bc contra hypothesin β major. Erit itaq; a major quàm d.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema 17.

Si duo triacula abc , def , duos angulos b , c , duobus angulis e , d se æquales habuerint, utrumq; utriq; : unumq; latus unilateri æquale, sive quod æqualibus adjacet angulis bc , ef seu quod uni æqualium angulorum subtenditur: ac & df & reliqua latera reliquis æqualia, utrumque utrique, & reliquum angulum a , reliquo d æqualem habebunt.



Nisi ergo ab & de sint æqualia, fiat ge æquale ipsi ab , ducaturq; gf . Iam cum ab , bc æquantur ipsis ge ,

*α ex hypot. ef , anguliq; b & e sint æquales, β erunt & anguli æqualibus lateribus oppositi æquales. c & efg .
γ 1. axiom. Cui c quoniam etiam æqualis est dfe , γ erunt dfe totus & gfe partialis æquales, quod d absurdum.*

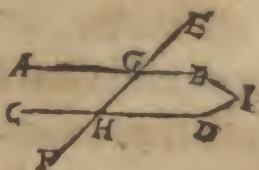
PRO.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema 18.

Si in duas rectas ab, cd , recta ef incidens, alternatim agh & ghd , angulos inter se æquales fecerit: parallelæ erunt inter se illæ rectæ.

Si non sunt, & concurrent productæ in i : eritque ghi triangulum, cujus latere gi producto in a , angulus externus agh , β major sit interno opposito ghi ; cui tamen ex hypothese æqualis erat. Sunt ergo parallelæ.



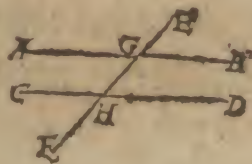
α 34. def. 1.
 β 16. 1.

PROPOSITIO XXIIIX.

Theorema 19.

Si in duas rectas ab, cd , recta ef incidens, externum age angulum, interno & opposito, chg , & ad easdem partes, æqualem fecerit: aut internos agh & ghc & ad easdem partes, duobus rectis æquales, parallelæ erunt inter se ipsæ rectæ.

Eidem enim age æquales sunt αhgb & βchg ; hi ergo tanquam alterni inter se & æquales, & parallelas arguunt ab & cd . Deinde



α 15. 1.
 β ex hypot.
 γ 1. axiom.
 δ 17. 1.

cum

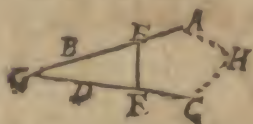
13. l.
3. axio.

cum β agh , & chg : itemq; agh & hgb duobus rectis sint α quales; erunt, ablato communi agh , anguli reliqui hgb & chg alterni α quales: ideoq; recta parallela.

L E M M A.

Si in duas rectas ab & cd , recta ef incidens, internos & ad easdem partes angulos bef & dfe duobus rectis minores faciat, duae illae rectae in infinitum productae sibi mutuò incident ad eas partes, ubi sunt duo anguli duobus rectis minores.

Si versus alteram partem dicamus concurrere



in h , ubi non sunt duobus rectis minores sed majores, fierent in triangulo ehf duo illi anguli duobus rectis majores. Quod α absurdum.

17. l.

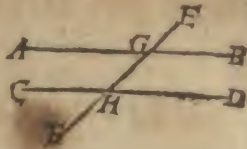
PROPOS: XXIX.

Theorema 20.

In parallelas rectas ab , cd , recta ef incidens, & alternatim angulos α quales efficit agh , ghd ; & externum bge interno & opposito dhg , & ad easdem partes α qualem; & internos bgh , ghd ad easdem partes duobus rectis α quales faciet.

Si

Si quis alternos negaverit aequales, alter agh esto major altero ghd . His inaequalibus additus communis bgh , cum contiguo quidem hga duobus rectis α aequantur; sed cum ghd duobus rectis erunt β minores, id est duo interni, & ita ab, cd non γ erunt parallele contra hypothesein. Quoniam igitur alternorum aequalium uni agh aequalis egb , erit etiam hic externus interno ad easdem partes opposito aequalis. Denique cum internus bgh cum externo egb duobus rectis sint α aequales, cum eodem bgh alter internus ghd duobus rectis α aequales erunt. Patet ergo propositum.

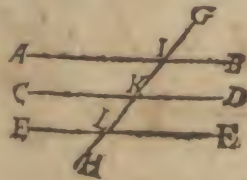
 α 13. l. β 4. axiom. γ 11. ax. δ 15. l. α 1. ax.

PROPOS: XXX.

Problema 21.

Quæ eidem rectæ lineæ ef sunt parallelæ ab, cd , & inter se sunt parallelæ.

Recta gh secet illas parallelas in ikl . Iam in ab, ef parallelas incidens gh , facit alternos aih & ilf α aequales. α 1. itemque externum ikd interno opposito klf , vel ilf ; β Erunt ergo & aik & ikd alterni aequales, rectæq; ab & cd γ parallele.

 α 29. l. β 1. ax. γ 27. l.

PRO-

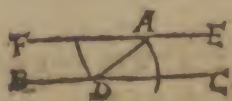
EVCLIDIS ELEM:
PROPOS: XXXI.

Problema 10.

Per datum punctum a , datæ rectæ bc , parallelam rectam ef ducce-
re.

α 23.1.
 β 27.1.

Ducta ad fiat angulus adc æqualis daf
alternus, continueturq; fa
in e . β Erunt illæ propter al-
ternos æquales parallelæ.



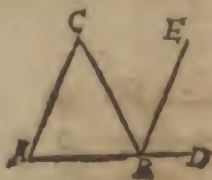
PROPOS: XXXII.

Theorema 22.

Omnis trianguli acb , unolatiere
 ab producto in d ; externus angulus
 cbd duobus internis oppositis a & c
est æqualis: & trianguli tres anguli,
duobus rectis sunt æquales.

α 31.1.
 β 29.1.

Lateri aca agatur per punctum b parallela
 be . In duas ergo has parallelas ac & bc incidens
 cb , efficit alternos cbe & $c\beta a$ -
quales; ad verò linea externum
 cbd interno opposito a . Sic to-
tus externus internis duobus op-
positis æqualis est. Quibus si ad-
datur tertius internus cb a communis γ erunt tres
trianguli anguli duobus rectis æquales.



γ 13.1.

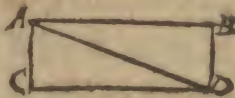
PRO-

PROPOS: XXXIII.

Theorema 23.

Rectæ lineæ ac , db , quæ æquales
 ab , cd ad partes easdem conjungunt,
 & ipsæ æquales & parallelæ sunt.

Ducta ad efficit alternos $b a d$, $a d c$ æqua- α 29. I.
 les, comprehensos duorum triangulorū β æqualibus β ex hypot:
 lateribus ab ipsi cd & ad
 communi. Bases itaque ac
 & bd seu rectæ æquales p.a-
 rallelas connectentes sunt γ æquales: & anguli
 cad , adb æquales: qui alterni etiam paralle- δ 27. I.
 las easdem ac & bd ostendunt.



PROPOS: XXXIV.

Theorema 24.

Parallelogrammorum spacio-
 rum $abcd$; æqualia sunt inter se, quæ
 ex aduerso & latera & anguli; atque
 illa bifariam secatur diameter ac .

Ducta diameter ac facit alternos acd & cab
 b ; cad & acb æquales, quos angulos æquales α 29. I.
 cōmunis interjacens basis ac Triangulorū abc &
 adc , reliqua latera reliquis
 seu opposita efficit β æqualia, β 25. I.
 & reliquos angulos b, d op-
 positos, sicut & ex æqualibus compositi a & c γ 2. axiom.
 C quales



34. 1.

quales sunt; & tota triangula abc & adc sunt
 æqualia, sectum nimirum est bisariam paral-
 logrammum per diametrum.

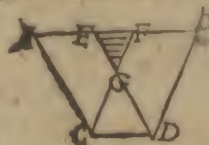
PROPOSITIO XXXV.

Theorema 25.

Parallelogramma $cdea$, $cdbf$,
 super eadem basi cd , & in eisdem pa-
 rallelis ab , cd constituta, inter se
 sunt æqualia.

34. 1.
 1. ax.
 2. ax.
 ex hyp.
 29. 1.
 4. 1.
 3. axio.

Eidem cd æquales ac & fb inter se sunt
 æquales, quibus eadem cf , addita γ æquales fa-
 cit af & eb . Iam triangula fac & bed æ-
 qualium laterum af & eb , ac &
 ed , & angulorum ipsis compre-
 hensorum caf , deb erant æqua-
 lia, a quibus ablatum commune triangulum egf ,
 relinquit trapezia $aegc$, $bfgd$ æqualia, qui-
 bus commune additum triangulum cgd , paral-
 logramma $cdea$ & $cdbf$ super eadem basi in
 iisdem parallelis ostendit γ æqualia.



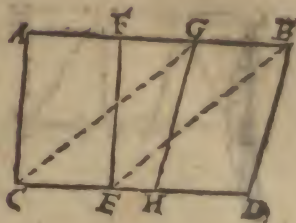
PROPOSITIO XXXVI.

Theorema 26.

Parallelogramma $acfg$, $ghdb$,
 super æqualibus basibus ce , hd , & in
 eisdem

eisdem parallelis ab , cd constituta,
inter se sunt æqualia.

Conjunctis gc , be & fi-
unt parallelogramma data
eidem ceb , ideoque &
inter se æqualia.



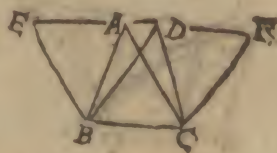
α 35. l.
 β 1. axio.

PROPOS: XXXVII.

Theorema 27.

Triangula abc , dbc super eadem
basi bc , & in eisdem parallelis bc , ad ,
inter se sunt æqualia.

Per puncta b & c & ducantur parallelae be ,
 cf ipsi ca , bd , quæ concurrant cum ad utrinque
producta. Sunt ergo super
eadem basi bc in iisdem
parallelis constituta pa-
rallelogramma $bcae$, b
 cf & æqualia, ideoque & ipsorum dimidia trian-
gula data & æqualia.



β 35. l.
 γ 34. l.

PROPOS: XXXIIX.

Theorema 28.

Triangula bac , edf , super æqua-
libus basibus bc , ef constituta, & in
eisdem parallelis, inter se sunt æqua-
lia.

C 2

Iterum

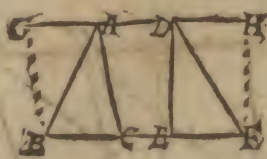
α 31. 1.

Iterum per puncta b, f ductis parallelis $bg,$
 fh ipsis ca, ed ; & utring, continuata a d sunt.

β 36. 1.

γ 34. 1.

δ 6. axiom.



parallelogrammum cg &
 eh super equalibus basibus
 β equalia, & proinde i-
 pforum γ dimidia seu data
 duo triangula δ equalia.

PROPOS: XXXIX.

Theorema 29.

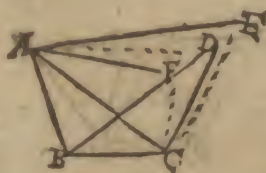
Triangula abc, dbc equalia su-
 per eadem basi bc , & ad easdem par-
 tes constituta, in eisdem quoq; sunt
 parallelis bc, ad .

α 31. 1.

β 37. 1.

γ ex hypot.

δ 9. axiom. angula β bfc parziale & γ bdc totale. Quod
 δ absurdum.



Sin minus, α fiat a f
 parallelà ipsi bc & duca-
 tur fc . Erunt Triangulo
 eidem bac equalia Tri-

PROPOSITIO XL.

Theorema 30.

Triangula abc, def equalia su-
 per equalibus basibus bc, ef , & ad
 easdem partes constituta, in eisdem
 quoque sunt parallelis ad, bf .

Sin

Sin minus, α fiat $a h$
 parallela ipsi $b f$ & ducatur
 $h f$. Iterum eidem tri-
 angulo $b a c$ α equalia erunt
 triangula β & $h f$ partiale
 & γ & $d f$ totale. Quod δ absurdum.



α 31. l.
 β 38. l.
 γ ex hyp.
 δ 9. axiom.

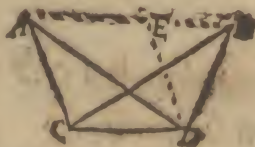
PROPOSITIO XLI.

Theorema 31.

Si parallelogrammum $a c d e$ cum
 triangulo $b c d$ eandem basin $c d$ ha-
 buerit, in eisdemq; fuerit parallelis
 $a b, c d$; duplum erit parallelogram-
 mum trianguli.

Ducatur diagonus $a d$.

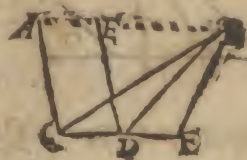
Erit Trianguli $a c d$ α α -
 qualis Triangulo $c b d$ β
 duplū parallelogrammum
 $a c d e$. Ideoq; & ipsius $c b d$ γ duplum erit.



α 37. l.
 β 34. l.
 γ 6. axiom.

Corollarium.

Si Triangulum $b c f$ duplam ha-
 buerit basin $c f$, fueritque in eisdem
 parallelis cum parallelogrammo $a c$
 $d e$, erit triangulum parallelogram-
 mo α quale.



Ducta enim $b d$, ejus-
 dem trianguli $b c d$ dupla

C 3

sunt,

α 38. l. β 41. l. γ 6. ax.

sunt, α triangulum $e b f$ & β parallelogrammum
 $a c d e$. Ideoq₂ sunt γ equalia.

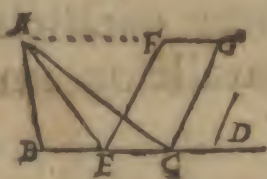
PROPOSITIO XLII.

Problema 11.

Dato Triangulo $a b c$ α quale pa-
 rallelogrammum, $c e f g$ constituere
 in dato angulo rectilineo d .

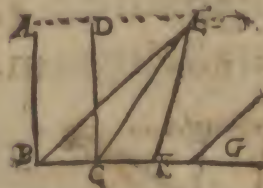
 α 10. l. β 23. l. γ 31. l.

α Diviso latere $b c$ bisariam in e , β fiat &
 punctum c angulus angulo dato rectilineo d equa-
 lis, γ aganturque parallele
 ag ipsi $b c$ per a , & $c g$
 ipsi $e f$ per c ; & connectan-
 tur demum puncta a , e .
 Quoniam ergo ejusdem tri-
 anguli $e a c$ dupla sunt, δ
 triangulum $b a c$ & parallelogrammum $e f g c$,
 erunt ζ equalia.

 δ 38. l. ϵ 41. l. ζ 6. axio.

Conversa.

Dato parallelogrammo $a b c d$,
 α quale Triangulum $b e f$ constituere
 in dato angulo rectilineo g .

 α 23. l.

& ducatur $c e$.

α Fiat angulus $c b e$ α -
 qualis angulo g . secetq₂ $b e$
 productam $a d$ in e ; & in
 continuum addatur ipsi $b c$
 equalis $c f$, junganturq₂ $f e$
 Quia rursus ejusdem trianguli
 $b e c$

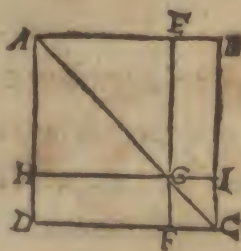
hec dupla sunt β triangulum bef & parallelo- β 38. l.
grammum $abcd$, etiam inter se sunt α equalia. γ 41. l.
 δ 6. axiom.

PROPOS: XLIII.

Theorema 32.

In omni parallelogrammo $abcd$,
Complementa $d f g h$, $b e g i$, eorum
quæ circa diametrum ac sunt, paral-
lelogrammorum $a e g h$, $c f g i$, sunt
inter se equalia.

$Ab \alpha$ equalibus triangu-
lis adc , abc , ablatiis tri-
angulis α equalibus ahg ,
 ceg , relinquuntur Trape-
zia $hgcd$, $egcb$ β α -
qualia; à quibus iterum
sublatiis α equalibus triangulis gfc , gic , relin. β 3. ax.
quantur complementa duo gb & gd β equalia.

 α 34. l.

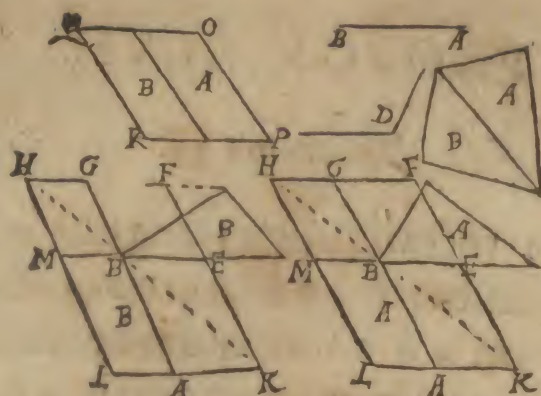
PROPOS: XLIV.

Problema 12.

Ad datam rectam ab , dato tri-
angulo c , æquale parallelogram-
mum applicare in dato angulo recti-
lineo d .

C 4

Fiat



*æquales suas altitudines conjungantur. β Erit β 9. axiom.
totum hoc parallelogrammum toti rectilineo dato
æquale, cum singulæ partes respondeant singulis.*

PROPOS: XLVI.

Problema 14.

*A data recta linea ab , quadra-
tum $abcd$ describere.*

*Ex alterutro termino a lineæ datæ a eriga- æ 11. l.
tur perpendicularis ad æqualis lineæ datæ & per d
β agatur lineæ ab parallela & æqualis dc , jun- β 31. l.
ganturq; c & b . γ Aequales & parallelas, ab , γ ex constr.
 de , connectentes da & cb erunt δ 33. l.
δ æquales, & parallelogrammum ε 1. axio.
factum æquilaterum; & propter § 34. l.
angulos c, b , oppositos rectis $a d$ & η 26. d. f. l.
rectos, rectangulum: ideoq; quadratum.*



C 5

PRO.

EVCLIDIS ELEM:
PROPOS: XLVII.

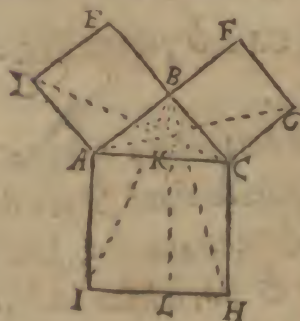
Theorema 33.

In rectangulis triangulis abc ,
quadratum, quod à latere a erectum
angulum abc subtendente descri-
bitur; æquale est quadratis abd ,
 $begf$, quæ à lateribus rectum angu-
lum continentibus describuntur.

α 46. l.
β 14. l.
γ 31. l.

α Descriptis tribus quadratis ah , ae , cf ,
in directum β adjacent lineæ ab , bf & cb , be ; γ
ductæ ag , bl parallela ipsi ai , ducantur etiam bh ,
 bi , ag , cd .

δ 2. ax.
ε 4. l.
ζ 41. l.
η 6. ax.



Addito communi angulo
 bac ad rectos dab & iac
sunt δ æquales anguli iab ,
 dac , & ipsæque triangula
 dac , iab , eorumque ζ du-
pla parallelogramma ae
& al æqualia; eodemque
modo cf & cl demonstran-
tur æqualia: Erunt ergo quadrata ae , cf , qua-
drato ah , quod ex parallelogrammis al & cl
compenitur æqualia.

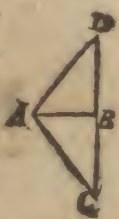
PROPOS: XLIIIX.

Theorema 34.

Si

Si quadratum, quod ab uno latere a c trianguli $a b c$ describitur, æquale sit eis, quæ à reliquis $a b, b c$ trianguli lateribus describuntur quadratis: angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus rectus est.

Erigatur ex b lineæ $a b$ perpendicularis $b d$ æqualis ipsi $b c$ & connectantur $a d$. Quoniam Quadrata $a a d$ & $\beta a c$ æqualia quadratis $a b, b d$ itemq; $a b, b c$ erunt etiam inter se, æqualia: & sic in triangulis æqualium laterum $a b c$ & $a b d$ etiam anguli $a b c$ & $a b d$ æquales erunt: quorum uno $a b d$ existente recto, etiam alter $a b c$ rectus erit.



α 47. l.
 β 1. hyp.
 γ 1. ax.
 δ 8. l.

EUCLI-

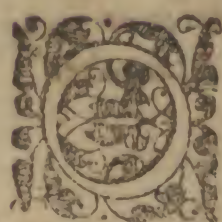


EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER II.

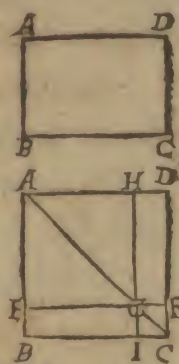
Definitiones.

I.



Quoniam parallelogram-
mum rectangulum $abcd$
contineri dicitur sub re-
ctis duabus lineis, ab, ad ,
quæ rectum comprehen-
dunt angulum bad .

2. In omni parallelo-
grammo spacio $abcd$ u-
nquodlibet ag vel gc co-
rum, quæ circa diametru
sunt, parallelogrammoru,
cum duobus complementis bg & gd
Gnomon vocetur.



PRO-

LIBER II.
PROPOSITIO I.

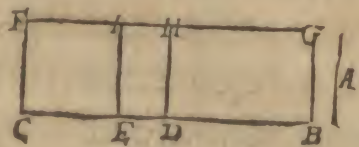
45

Theorema I.

Si fuerint duæ rectæ lineæ a & bc ,
seceturq; ipsarum altera bc in quot-
cunque segmenta bd, de, ec ; Rectā-
gulum bf comprehensum sub illis
duabus rectis lineis a & bc æquale est
eis, quæ sub infecta a , ^{vel} bg , & quoli-
bet segmentorum bd, de, ec com-
prehenduntur, rectangulis bh, di, ef .

Erigatur ex puncto b perpendicularis bg
ipsi a æqualis, compleaturque rectangulum bf
comprehensum sub bc & bg . Rursus etiam ex
punctis sectionum d &

e erigantur perpen-
diculares dh & ei β
æquales & parallele



α 11. I.
 β 31. & 34. I.

lineæ gh , ut fiant rectangula bh, di, ef , quæ
tanquam partes simul sumtæ æqualia sunt toti bf
sub datis lineis comprehenso. Quod erat ostenden-
dum.

PROPOSITIO II.

Theorema 2.

Sic recta linea ab secta sit utcun-
que in c : rectangula af & cd , quæ sub
tota, & quolibet segmentorum ac &
 cb

cb comprehenduntur, æqualia sunt
 ci , quod à tota fit, Quadrato ad .

α 46. 1.
 β 31. 1.

Super recta ab α describatur quadratum ad , &
 β ducatur per c ipsis a & d b pa-
 rallela & æqualis cf . Fiunt ergò
 af & cd parallelogramma, tan-
 quam partes simul sumtæ æqualia
 toti ad quadrato.



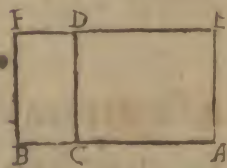
PROPOSITIO III.

Theorema 3.

Si recta linea ab secta sit utcum-
 que: rectangulum af sub tota ab &
 uno segmentorum ac comprehen-
 sum, æquale est illi, quod sub segmē-
 tis ac , cb comprehenditur, rectan-
 gulo cf & illi, quod à prædicto se-
 gmento ac describitur, Quadrato
 ad .

α 46. 1.

Ex utrovis segmento, ut ac α fiat quadratum
 $acde$, & producta recta ed in
 f fiat æqualis ipsi ab , & conne-
 ctantur fb . Erit cf rectan-
 gulum ex segmentis; & totum
 rectangulum af æquale quadrato segmenti ad
 una



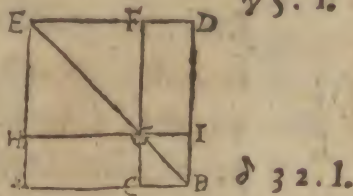
una cum illo segmentorum rectangulo, tanquam
totum suis partibus simul sumtis.

PROPOSITIO IV.

Theorema 4.

Si recta linea ab lecta sit utcun-
que in c ; Quadratum ad , quod à to-
ta ab describitur, æquale est & illis,
quæ à segmentis ac , cb describuntur,
quadratis bf , ci , & ci , quod his sub
segmentis comprehenditur, rectan-
gulo ga , gd .

In Quadrato ad , ex ab a descripto, duca-
tur diagonus be , & ex puncto sectionis c β aga-^{a 46. l.}
tur ipsi ae parallela cf secans diametrum in g
puncto, per quod parallela β fiat hi ipsi ab . Ut β 31. l.
ergò in triāgulis isoscelibus rectangulis eab & ed
 b anguli ad basim γ æquales sunt δ γ 5. l.
semirecti; ita in triāgulis efg
& ehg rectangulis, ad basim eg
angulis existentibus δ æqualibus,
etiam latera ipsis opposita æqualia
sunt, quibus similiter sua opposita sunt: æqualia, ϵ 34. l.
adeoque hfe & quadratum, ut & ci , utrumq; ζ 43. l.
videlicet sui segmenti. Horum lateribus tanquam
segmentis, complementa ga & gd ζ æqualia, com-
prehensa sunt, quæ cum segmentorum quadratis
quadrato totius sunt æqualia.



Corol-

In quadratis quæ circa diame-
trum sunt parallelogramma, qua-
drata sunt.

PROPOSITIO V.

Theorema 5.

Si recta linea ab secetur in æqua-
lia ac, cb & non æqualia ad, db : re-
ctangulum ab sub inæqualibus se-
gmentis totius comprehensum, unà
cum quadrato kg , quod ab inter-
media sectionum cd æquale est ei,
quod à dimidia cb describitur, qua-
drato cf .

46. l.

11. l.

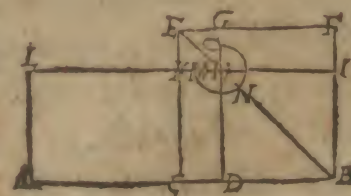
31. l.

36. l.

43. l.

cor. 4. l.

Ex cb dimidia de-
scribatur quadratum cf , & ducatur diagonus,
quam ex d erecta per-
pendicularis secet in pū-



cto li , per quod æqualis & parallela li agatur
ipsi ab , & l cum a conjungatur. Iam si rectangu-
lorum d æqualium uni a k adjiciatur, complemen-
torum æqualium unum ch ; alteri verò c i alte-
rum hf , & utriq; commune g quadratum inter-
segmenti ik ; erit ah rectangulum inæqualium
segmentorum unà cum illo intersegmenti quadra-
to,

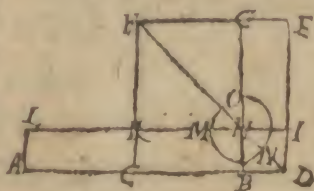
to, kg æquale gnomoni mno cum eodem quadrato, seu quadrato ce dimidia cd .

PROPOSITIO VI.

Theorema 6.

Si recta linea ab secetur in e , & illi recta quædam linea $b d$ in rectum adjiciatur: rectangulum ai comprehensum sub tota cum adjecta ad & adjecta bd , unà cum quadrato kg à dimidia cb æquale est quadrato ce à linea, quæ cum ex dimidia cb tam ex adjecta bd componitur, tanquam ab una descripto.

Describatur ex cd quadratum ce cum diametro df , quam ex b & e recta perpendicularis intersectet in h puncto, per quod ipsi ad & ducatur parallela & æqualis il . Rectangulo eidem ch & equalibus ak & he , addito communi ei , & equalia sunt rectangulum ai & gnomon mno ; adeoque & aucta communi quadrato kg .



a 46.l.
 b 11.l.
 c 32.l.
 d 36. & 43.l.
 e 1.2x.

D PRO.

PROPOSITIO VII.

Theorema 7.

Si recta linea $a b$ secetur utcumq;
in c , quod à tota $a b$, quodque ab uno
segmentorum $b f$, utraq; simul qua-
drata, æqualia sunt & illi, quod bis
sub tota, & dicto segmento compre-
henditur, rectangulo $a f$, $b d$, & illi
quod à reliquo segmento fit, qua-
drato $g b$.

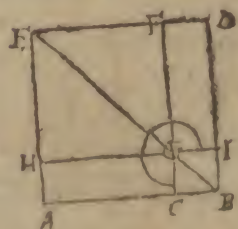
a 46. l.

β 11. l.

γ 31. l.

δ 4. l.

ε 8. ax.



Iterum super $a b$ describatur quadratum
& ducta diagono ex c perigatur perpendicularis $c f$
& per g data $a b$ parallela γ fiat $h i$. Cum ergo
gnomoni $i e c m$, unà cum qua-
drato $g b d$ æquale sit quadra-
tum $a d$; addito communi $h f$,
erunt quadrata $a d$ ex tota, &
 $h f$ ex segmento æqualia rectan-
gulis $a f$ & $h d$, sub tota & se-
gmento comprehensis, unà cum reliqui segmenti
quadrato $g b$.

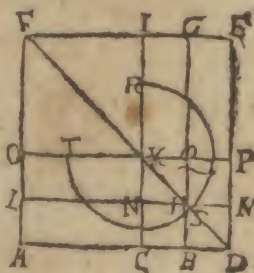
PROPOS: IIX

Theorema 8.

Si recta linea $a b$ secetur utcum-
que

que *in e*: rectangulum *ab* quater cō-
prehensum sub tota *ab* & uno se-
gmentorum *cb*, cum eo, quod à reli-
quo segmento fit quadrato *oi* aqua-
le est ei, quod à tota & dicto segmen-
to, tanquam ab una *ad* linea descri-
bitur, quadrato *ae*.

Vicūq; in *c* secta *ab* ad-
ponatur *bd* equalis ipsi *cb*,
& *a* describatur quadratum
ae super tota *ad*: ex punctis
autem *c* & *b* erigantur
perpendiculares & parallela
ci & *bg*, quæ diagonium



a 46. l.

b 11. l.

fd secant in *k* & *h* punctis, per quæ ipsi *ad* paral-
lela & æquales *agantur*. *d* Aequalibus igitur pa-
rallelogrammis singulis *an*, *lk*, *kg*, *qe*, ex se-
gmentis datae lineæ factis, si addantur singula
quadrata *ae* equalia ex altero segmento facta; e.
runt quatuor hæc rectangula ex tota & segmento
& inter se 2 equalia. & simul sunt agnomeni *rst*:
quibus si addatur quadratum *oi* ex priore segmē-
to *ac*, equalia erunt quadrato *ae* facto ex tota
ab cum segmento *bd* tanquam ab una partes si-
mul sumta toti.

PROPOS: IX.

Problema 9.

D 2

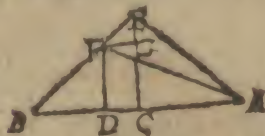
Si

EVCLIDIS ELEM:

Si recta linea ab secetur in æqualia ac, cb , & non æqualia ad, db : Quadrata ad, db , quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia, sunt & eius, quod à dimidia ac , & eius, quod ab intermedia sectionum cd fit, quadrati.

Dimidia ac æqualis a erigatur perpendicularis ce , & cum a & b connectatur, ut fiant duo triangula isoscelia rectangula ace & bce , quorum anguli ad bases a & b erunt æquales & semirecti, & totus acb ex duobus semirectis rectus. Rursus erigatur ex d perpendicularis df , & per f ipsi cd fiat parallela & æqualis.

731.1.



Erunt ergo in duobus rectangulis triangulis bdf & egf semirecti ad bases & his subtensa latera d æqualia.

25.1.

Denique ducatur af . In triangulo ace quadratum hypotenuse ae æquale est quadratis ex ac & ce , vel duplum quadrati dimidia ac , itemque quadratum ef duplum erit quadrati gf vel cd intermedia: ac proinde quadrata ae & ef simul sumpta erunt dupla quadratorum ac dimidia & cd intermedia.


47.1.

Cumque quadratum af æquale sit, & quadratis ae & ef simul sumtis, & quadratis ad & df vel db inæqualium segmentorum; erunt hæc quadrata inæqualium segmentorum dupla quadratorum ex dimidia & intermedia. Quod erat propositum.

PRO.

Theorema 10.

112

♩ 47. 

segmenti ag : aequale rectangulo gc comprehenso sub data recta ab & altero segmento gb .

PROPOSITIO XII.

Theorema II.

In amblygonijs triangulis abc , quadratum quod fit à latere ac angulum obtusum abc subtendente, majus est quadratis, quæ fiunt à lateribus ab, bc , obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo cfk bis comprehenso & ab uno laterum cb , quæ sunt circa obtusum angulum, in quod cum protractum fuerit, cadit perpendicularis ad , & ab assumpta bd exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

Ex puncto a demittatur perpendicularis ad in latus cb protractum. Quadratum ex cd α 2. l. β aequale est quadratis segmentorum cb & bd , unà cum rectangulo bis sub segmentis β 4. l.

D * sumto:

EVCLIDIS ELEM:



sumto: quibus si addatur com-
mune quadratum perpendicu-
laris ad , & erunt tria quadra-
ta ex segmentis & perpendicu-
lari, unà cum rectangulo bis
sub segmentis equalia duobus
quadratis ex cd & ad , qui-

47.1.

bis d equale est quadratum $a c$. Cumq; qua-
dratum $a b$ tantum sit d equale quadratis $a d$ &
 $b d$, erit quadratum $c a$ majus quadratis laterum
obtusum angulum includentium rectangulo bis sub
uno laterum $c b$ & assumta $b d$ comprehenso.

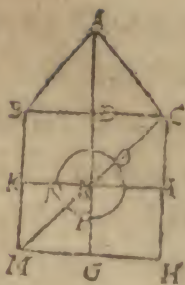
PROPOS: XIII.

Theorema 12.

In oxygonijs triangulis abc qua-
dratum à latere ab angulum acutum
 acb subtendente minus est quadra-
tis, quæ sunt à lateribus ac , bc acu-
tum angulum comprehendentibus,
rectangulo bi & dh , bis comprehen-
so & ab uno latere bc , quæ sunt cir-
ca acutum angulum, in quod perpē-
dicularis ad cadit, & ab assumta in-
terius linea dc sub perpendiculari
prope acutum angulum.

Demo-

Demittatur perpendicularis ad in latus bc angulo dato c adjacens. Est quadratum rectae ab β aequale quadratis ad & bd : quadrato autem bd maius est quadratum rectae bc , gnomone nop : quadratum verò ac β aequale est quadratis ad & dc , majus nimirum quadrato ad per quadratum dc . Sic ergo quadratum rectae ab minus est quadratis rectarum bc & ca , rectangulo bis sumto sub tota bc , & segmento dc , id est, rectangulis bi & dh .

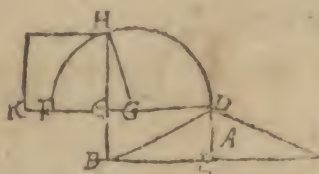
 α 12. l. β 47. l.

PROPOS: XIV.

Problema 2.

Dato rectilineo a , aequale quadratum ci constituere.

Fiat rectilineo a , aequale rectangulum bc de ; extendaturq; latus dc in f , intervallo cb , ipsaq; df β secetur bisariam in g , & ex g intervallo gd vel gf describatur semicirculus $d h f$, producta bc in h . Cum ergo recta df secta sit aequaliter in g & inequaliter in c , erit rectangulum ec sub dc & cf , unà cum quadrato gc

 α 45. l. β 10. l.

D 5

v. aequale

5. 11.

47. 1.

1. 27.

et aequale quadrato rectæ gf & gh . Quadrato
autem gh æqualia sunt quadrata gc & ch .
Ergo & rectangulum ec unà cum quadrato gc ,
æquale est quadratis rectarum gc & ch . Ablato
communi quadrato gc ; remanebunt æqualia rect-
angulum ec vel a , & quadratum rectæ ch . Quod
erat faciendum.




EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER III.

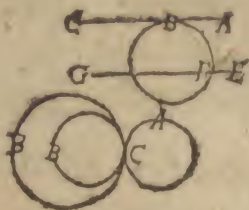
Definitiones.

I.

 ÆQUALES circuli
sunt afb , bgc ,
quorum diametri ab ,
& bc sunt æquales; & quorum quæ ex
cen-

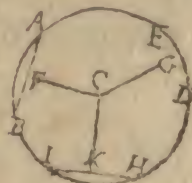
centris rectæ $d f$, $e g$ sunt æqua-
les.

2. Recta $a b c$ circu-
lum $b f d$ tangere dici-
tur; quæ cum circu-
lum tangit in b , si pro-
ducatur, circulum nō
secat.



3. Circuli sese mutuò tangere in c
dicuntur, qui sese mutuò tangentes,
sese mutuò non secant.

4. In circulo $a b d$ rectæ $a b$, $b i$ æ-
qualiter à centro c distare dicuntur;
cum perpendiculares $c k$, $c f$, quæ à
centro c in ipsas ducuntur, sunt æqua-
les. Longius abesse illa di-
citur $d e$, in quam major $c g$
perpendicularis cadit.



5. Segmentū c circuli est fi-
gura, quæ sub recta linea, b
 d & circuli peripheria $b a d$
comprehenditur.



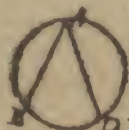
6. Se-



6. Segmenti angulus bac est, qui sub recta linea ac & circuli peripheria comprehenditur.



7. In segmento angulus est, cum in segmenti peripheria sumtum fuerit quodpiam punctum b , & ab illo in terminos rectæ a, c , qui segmenti basis est, adjunctæ fuerint rectæ lineæ; angulus abc , ab adjunctis illis comprehensus.



8. Cum verò comprehendentes angulum rectæ da, ba aliquam assumunt peripheriam; ille angulus bda peripheriæ db insistere dicitur.

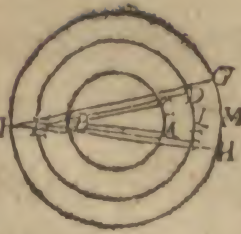


9. Sector Circuli est, cum ad ipsius circuli centrum e constitutus fuerit angulus aec : estque figura comprehensa à rectis ae, ec angulum continentibus, & à peripheria adc ab illis assumpta.

10. Similia circuli segmenta sunt, quæ

LIBER III.

quæ angulos capiunt æ-
quales : aut in quibus
anguli b, e, i , inter se
sunt æquales. Ita arcus
vel circumferentiæ ake ,
 $d l f, m b i$ similes dicuntur, quibus æ-
quales anguli insistent.



PROPOSITIO I.

Problema 1.

Dati circuli $a b c$ centrum f in-
venire.

Ad ducta. α in circulo rectam ac , α bisari- α 10. l.
amq, secta in e , β erigatur perpendicularis, quæ β 11. l.
atring, in peripheriam terminata,
etiam α sectetur bisariam in f , centro
circuli. Sin minus, cum in illa re-
cta aliud esse non possit, extra ipsam
ponatur g ; ducanturq, $g f a, g c, g e$. Quia ergo
æqualis sunt in triangulis age . & egc omnia, 15. de f. l.
latera $\gamma a g, g c; d a e, e c$; & $g e$ commune; α d ex const.
quales etiam erunt anguli $a e g, c e g$ & recti; 18. l.
tus $a e g$ parti $f e a$, æqualis. Quod ab- 19. ax.
surdum.



Corollarium.

Si recta rectam ad angulos re-
ctos

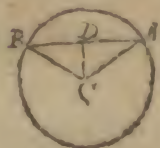
ctos in circulo æquibifecet, in secante centrum erit circuli.

PROPOSITIO II.

Theorema 1.

Si in circuli peripheria duo quælibet, puncta accepta fuerint, recta linea *ab* quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

16.1.



15.1.

19.1.

In recta *ab* assumatur quodcunque punctum *d* & ducantur ex centro *ca*, *cb*, *cd*. Cum ergo angulus *cda* major sit angulo *cdb* seu angulo *cad*; erit etiam *ca* semidiameter & maior linea *cd*. Ideoque punctum *d*, & quavis alia intermedia puncta lineæ *ab* cadunt intra circulum.

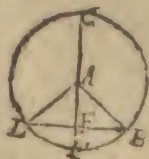
PROPOSITIO III.

Theorema 2.

Si in circulo *bcd* recta quædam linea *ce* per centrum extensa, quædam non per centrum extensam *bd* bifariam secet in *f*, eam ad angulos rectos secabit. Et si ad angulos rectos

Et os eam secet, bifariam quoque eam secabit.

Quia enim in Triangulis afb , afd laterum a equalium etiam lateribus equalibus oppositi anguli sunt a equalis, erunt afb , afd recti



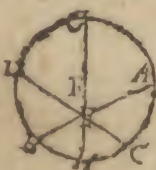
a ex conf.
& 15. def. 1.
 β 8. l.
 γ 10. def. 1.

PROPOSITIO IV.

Theorema 3.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ab , cd sese mutuò secant in e , non per centrum extensæ; sese mutuò bifariam non secabunt.

Quod si bifariam se secarent; tum ex centro f ducta recta fe utramq; secaret ad angulos rectos β equalis in e partemq; toti equalis efficeret. Quod est γ absurdum.



a 3. III.

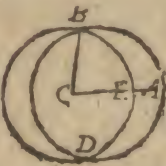
β 10. def. 1.
 γ 9. ax.

PROPOSITIO V.

Theorema 4.

Si duo circuli abd , bed sese mutuò secant in b & d ; non erit illorum idem centrum c .

Si centrum commune esset c , ductis lineis, cb & ca erunt cb , ce & ca equalis, pars toti. Quod β absurdum.



a 15. def. 1.
 β 9. ax.

PROQ.

PROPOSITIO VI.

Theorema 5.

Si duo circuli ab , cb sese mutuò
interius tangant in b ; eorum non erit
idem centrum d .

*a 15. def. 1.
p 9 ax.*



*Si centrum commune esset d ,
ductis lineis db & da , dc , erunt db ,
 da , & dc æquales, pars toti. Quod
è absurdum.*

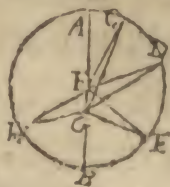
PROPOSITIO VII.

Theorema 6.

Si in diametro circuli ab quod-
piam sumatur punctum g , quod cir-
culi centrum non sit, ab eoque pun-
cto g in circulum quædam rectæ li-
neæ gc , gd , ge cadant: maxima qui-
dem erit ga in qua centrum; mi-
nima verò reliqua gb ; aliarum verò
propinquior illi, quæ per centrum f
ducitur, remotiore semper maior ga
*ipsa gc , & hæc ipsa gd : duæ autem so-
lùm rectæ æquales gb , ge ab eo pun-
cto*

Et og in circulum cadunt ad utraq;
partes minimæ gb vel maximæ ga .

Ex centro f ducantur semidia-
metri fc, fd, fe, fh , & ponaturq;
angulo efb æqualis $b fh$, & ducatur
recta gh . Quia enim fc & fg .



α 23. l.

hoc est, ga , & majores sunt latere

gc ; & hoc latere gd , quia in triangulis æqualium

β 15. de f. l.

laterum majori angulo subtensum; & hoc rursus la-

γ 20. l.

tere ge : Quia etiam ef , hoc est, fb minor est fg

δ 4. l.

& ge simul sumtis, ablato communi fg , etiam ge

major erit gb : adeoq; maxima est ga minima

gb ; reliquæ quo viciniore minimæ, eò sunt mino-

res. Quia deniq; in triangulis efg & gfh æ-

qualium laterum æquales angulos comprehendend-

um, bases ge & gh sunt æquales; ex utraque

parte minimæ gb æqualiter distantes sunt æqua-

res: Reliquæ omnes sunt vel minores versus b , vel

maiores versus a . Quod erat propositum.

PROPOS: IIX.

Theorema 7.

Si extra circulum sumatur pun-

tum quodpiam a , adeoque ad circu-

lum ducantur quædam rectæ $ab, ac,$

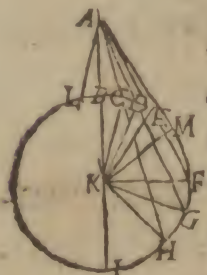
ad, ae , quarum una quidem ab per

E

cen-

centrum k protendatur; reliquæ verò utcunque: in concavam peripheriam cadentium rectarum af, ag, ab, ai , maxima quidem est ea ai quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ab illi ai , quæ centrum transit remotior ag semper major est; in convexam verò peripheriam cadentium rectarum linearum, minima quidem est illa ab quæ inter punctum a & diametrum bi interponitur; aliarum autem ea, ac , quæ propinquior est minimæ, remotiore ad semper minor est. Duæ autem tantum rectæ lineæ ac, al æquales ab eo puncto in ipsum circulum cadunt, ad utrasque partes minimæ ab vel maximæ ai .

Ex centro k ducantur semidiametri ad singula sectionis puncta: fiatque angulus akc angulo akl æqualis.



Quia enim rectæ ak, kh vel ai major est recta ah ; atque ita ah major quàm ag , & hæc quàm af , maxima itaque est ai , & reliquæ quò remotiores ab ea, hoc & minores. Contra cum ak minor sit

23. l.

20. l.
24. l.

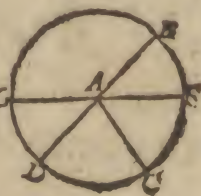
fit quàm $a c$ & $c k$, ablatiſ equalibus $k b$ & $k c$; d 21. l.
 relinquetur $a b$ minor quàm $a c$. Ita, cum d minores
 ſint $a c$ & $c k$; quàm $a d$, $d k$ & $h a$ d minores
 quàm $a c$, $c k$, $h a$ quàm $a m$, $m k$, demtis
 equalibus ſemidiametris, relinquentur $a d$ minor
 quàm $a e$, & $h a$ quàm $a m$, atq; ita illorum mi-
 nima eſt $a b$. Deniq; quia in triangulis $a k c$ &
 $a k l$ ſub equalibus lateribus comprehenduntur,
 anguli $a d k$ æquales, illis æqualia opponuntur la- e 4. l.
 tera $a l$ & $a c$, quibus nulla alia æqualis ex eodem
 puncto ad circumferentiam illam duci poteſt. Quod
 erat demonſtrandum.

PROPOS: IX.

Theorema 3.

Si in circulo acceptum fuerit pñ.
 ctum aliquod a , & ab eo puncto ad
 circulum cadant plures, quàm duæ,
 rectæ lineæ æquales; acceptum pun-
 ctum centrum eſt ipſius circuli.

Si minus a fuerit centrum,
 eſto c , & per c a ducatur diameter
 $f g$. Ex puncto ergo a dup. ad ſum-
 mum rectæ ad circumferentiam æ
 quales cadere poterunt; tertiâq;
 vel major vel minor erit. Quod eſt contra hypo-
 theſin præter a ergo aliud centrum non erit.



e 7. III.

E 2

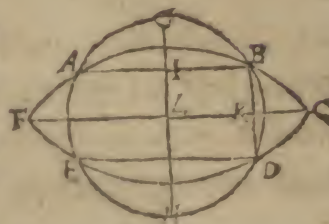
I R O

EVCLIDIS ELEM:
PROPOSITIO X.

Theorema 9.

Circulus $abcdef$ circulum agb
 dh e in pluribus quàm duobus pun-
ctis non secar.

*Secent se, si possibile
est in tribus punctis a, b, d
duo circuli, qui rectis a b,
b d connectantur, per qua-
rum puncta media i & k
erigantur perpendiculares i l & k l. Erit com-
munis illarum intersectio l centrum utriusq; circu-
li. Quod est d absurdum.*



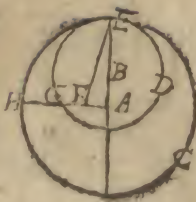
PROPOSITIO XI.

Theorema 10.

Si duo circuli c, d sese intus con-
tingant in e , atque accepta fuerint
eorum centra a, b , ad eorum centra
adjuncta recta linea ab & producta
in contactum e circulorum cadet.

*Si in recta $a e$ centrum b non fuerit. pona-
tur in f , & ducatur linea $a f g h$, Erunt $f e$ & $f g$,
 $a e$ &*

ac & ah \propto $equales$. Cumq; fe &
 fa β $equales$ ipsis af , fg , & $maiores$
 sint quàm ac seu ah ; erit pars ab
 major tota ah . Quod δ absurdum.



α 15. def. 1.

β 2. ax.

γ 20. l.

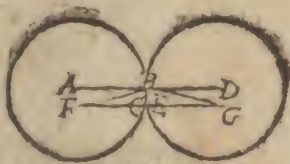
δ 9. ax.

PROPOSITIO XII.

Theorema 11.

Si duo circuli sese externus con-
 tingant in b , linea recta ad quæ ad
 centra eorum adiungitur, per con-
 tactum b transibit.

Sin minus recta conne-
 ctens centra per contactum b
 transit, esto fg , & connectan-
 tur bf , bg . \propto Erunt hæc due
 vel ge , fc maiores quàm fg , pars toto. Quod β ab-
 surdum.



\propto 20. l.

β 9. ax.

PROPOS: XIII.

Theorema 12.

Circulus circulum non tangit
 in pluribus punctis, quàm uno a sive
 intus sive extra tangat.

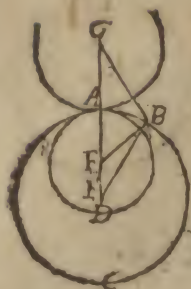
Recta per centra e & f \propto cadit in contactum a ;
 si præter a ponatur aliud contactus punctum b ,

\propto 12. III.

E 3

quod

820.1.
75. ax.

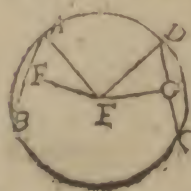


quod connectatur cum utroque centro
f & e. Cum ergò b f, f e sint β ma-
jores quàm e b, id est e a, ablata
communi e f, γ major erit f b quàm
f a & punctum b cadet extra circu-
lum interiorem, ubi nullus sit con-
tactus. Sic tangente se duo circuli
exteriorum itidem in a; recta connectens centra a ca-
dit in contactum a: Sin etiam in b fieret contactus,
tum b g & b e fierent δ aequales linea e a g. Quod
 β absurdum.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 13.

In circulo aequales rectæ ab, d c æ-
qualiter distant à centro e, & quæ æ-
qualiter distant à centro, aequales
sunt inter se.



q 12.1.
 β 7. III.
7 15. def. 1.

d 47.1.
q 3. ax.

In rectis a b, d c aequales ex centro,
e a ducantur perpendiculares in f &
g illorum puncta β media, item e a,
& e d γ aequales. Quia ergò quadra-
ta ex e a, e d aequalia, quadratis a f,
e f & d g eg sunt δ aequalia; ablatis aequalib. qua-
dratis laterum β aequalium a f, d g; residua qua-
drata γ aequalia, erunt aequalium laterum e f,
e g qua-

eg quadrata, id est, inscripta aequales aequaliter a centro distant.

PROPOS: XV.

Theorema 14.

In circulo maxima quidem linea est diameter af ; aliarum autem propinquior hi centro g remotiore cd semper major est.

In lineas hi , cd ex centro g ducantur perpendiculares gl , gk ; ipsiq; gl aequalis gm abscindatur de gk , & perpendicularis ipsi hi α 12. l. β 11. l. γ 14. l. δ 20. l. ϵ 9. ax. ζ 24. l.
 γ aequalis; ducanturq; semidiametri in puncta b , c , d , e . Cum ergo gb , gc , id est, af maiores sint, quam be , & angulus bge major angulo cgd ; erit af major quam be , & be seu hi est major quam cd . Quod erat ostendendum.



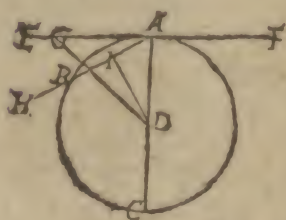
PROPOSITIO XVI.

Theorema 15.

Quæ se ab extremitate a cujusq; dia-

E 4 mc.

metri *ca* circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locum inter ipsam rectam lineam *ae* & peripheriam comprehensum, altera linea non cadet: & semicirculi quidem angulus *dab* quovis angulo acuto rectilineo major est; reliquus autem *bae* (contactus) minor.



α ex hypot.

β 17.1.

γ 17.1.

δ 12.1.

Sumatur in linea *ae* punctum *g* & connectatur cum centro *d*. Erit angulo α recto *a* oppositum latus *dg*, quàm *da*, oppositum β acuto γ & majus δ , punctum δ *g* cum ceteris omnibus illius lineae extra circulum. Deinde ducta alia *ah* infra ipsam *ae*, *d* demittatur in ipsam perpendicularis *di*. Angulo itaq; δ recto opponetur δ majus latus *da*, β acuto *dab* minus *di*. Ideo δ *i* punctum intra circulum cadit, & linea illa circulum secat, nec ulla inter Tangentem & circulum alia duci potest. Proinde neque minor erit angulus, angulo contactus *eab*; nec major angulo semicirculi seu corniculari *dab* inter quosvis rectilineos.

Corollarium.

Recta tangens circulum, in unico

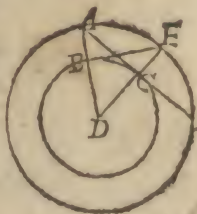
nico extremo diametri puncto tangit.

PROPOSITIO XVII.

Problema 2.

A dato puncto *a* rectam *ac* ducere, quæ datum circulum tangat in *c*.

Dati circuli centrum *d* connectatur cum *a* & ex intersectionis puncto *b* erigatur perpendicularis infinita, & ex centro *d* intervallo *da* descriptus circulus secet infinitam illam in *e*, quod cum centro *d* connexum, secat circulum datum in *c* puncto, ad quod ex *a* ducta recta *ac* tangit circulum.



11.4

Sunt enim in triangulis *acd* & *dbe* β equalium laterum cum angulo comprehenso communi γ . 4. l. *d*, etiam reliqui anguli reliquis γ æquales, δ recto δ 12. def. l. *b*, rectus *c*: • Ideoque *ac* Tangens. Quod erat δ 16. III. faciendum.

PROPOSITIO XIX.

Theorema 16.

Si circulum tangat recta quæpiam

E s linca

linea ab , à centro e autem ad contactum c adjungatur recta quædam lineam ec : quæ adjuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

219. l.
29. ax.



Si angulus ecb non est rectus, esto ecf rectus. Hujus ergo oppositum latus ec vel ed erit majus quam ef pars toto. Quod β absurdum.

PROPOSITIO XIX.

Theorema 17.

Si circulum d tetigerit recta ab quæpiam linea à contactu autem c recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur; in excitata erit centrum circuli.

218. lll.
plex constr.
& hypot.
79. ax.



Si centrum non est in ce , esto extra illam f , quod cum ca perpendiculari linea connectetur. β Erunt ergo ecb rectus & $fc b$ pars recti æqua. Quod absurdum.

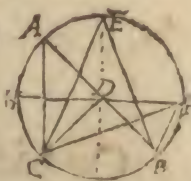
PRO-

PROPOS: XX

Theorema 18.

In circulo abc angulus ad centrum bdc duplex est anguli a, e, f ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria bc basis angulorum.

Primo si latus ba sit commune cum bd ; α erit externus bdc interiorum β aequalium alterius bac , anguli ad peripheriam duplus.



α 32. l.
 β 5. l.

Deinde includantur ba, ac duobus bd, de γ 32. & 5. l. & ducatur diameter eg ; γ Erunt rursus bdg, gdc dupli duorum beg, gec ; totiusq; bdc , totius bec .

Tertio fc secet latus ba , & ducatur diameter fh . γ Erit similiter angulus externus totus hdb duplus interim totius hfb ; sic etiam externus hdc auferendus ex toto hdb duplus est anguli cfh , etiam à suo toto hfb auferendi. Reliquus ergo ad centrum cdb est reliqui ad peripheriam cfb duplus. Quod erat demonstrandum.

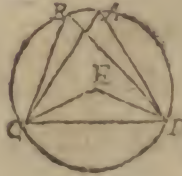
PROPOSITIO XXI.

Theorema 19.

In

In circulo, qui in eodem segmento dac sunt, anguli a, b , sunt inter se æquales.

20. III.
p 7. ax.



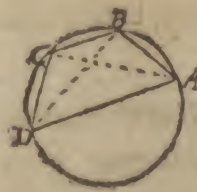
Ductis semidiametris ed, ec :
Quia angulus e utriusq₃ a & b duplus est, erunt β æquales.

PROPOS: XXII.

Theorema 20.

Quadrilaterorum $abcd$ in circulis descriptoꝝ $b a d, b c d$ anguli, qui ex adverso a, c duob. rectis sunt æquales.

22. I.
p 21. I.



Ducantur diagonij ac, bd .
Cum ergo trianguli bcd tres anguli duobus rectis sint æquales, partesq₃ anguli a sint duobus ad basin β æquales, cad & cbd ; cab & bdc ; erunt etiam oppositi a & c duobus rectis æquales.

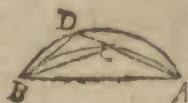
PROPOS: XXIII.

Theorema 21.

Super eadem recta linea ab , duo segmen-

segmenta circulorum similia, & inæqualia non constituentur ad easdē partes.

Ductis $a c d, c b, d b$: Erunt in a similibus segmentis anguli c & d β æquales. Quod γ absurdum.



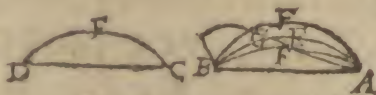
α ex hypot.
 β 10. def. III.
 γ 10. 1.

PROPOS: XXIV.

Theorema 22.

Super æqualibus rectis lineis $a b, c d$, similia circulorum segmenta, sunt inter se æqualia.

Propter bases enim $a b, c d$ α æquales congruentes, congruere sibi debent ipsa segmenta $a e b, c f d$. Sin minus, erunt vel inæqualia, sed non β similia contra hypotesin: vel circulus circulum in pluribus, γ 10. III. a, g, b quàm duobus punctis secabit. Quod γ absurdum.



α 8. ax.

β 23. III.

γ 10. III.

PROPOS: XXV.

Problema 3.

Circuli segmento $a b c$ dato, describere circulū, cuius est segmentū.

α See.

α 10. l.

β cor. 1. III. αm, quæ centrū circuli continet. secetur itē alia

γ 21. l.

δ 4. l.

ε 9. III.



inscripta ab bisariam per aliam lineam, quæ priorem secabit in e centro. Vel ad a ipsi a b e angulo γ fiat equalis bae ductis ae & ec; erunt tres lineæ ae, ec, eb δ æquales

& c. centrum circuli.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema. 23.

In circulis æqualibus, æquales anguli æqualibus peripherijs *df*, *ac* insistant; sive ad centra *g*, *h*, sive ad peripherias *b*, *e* constituti insistant.

α 4. l.

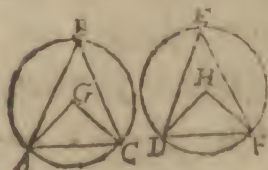
β 20. III.

γ 7. ax.

δ 10. def. III

ε 24. III.

ζ 3. ax.



Ducantur rectæ *ac*, *df*

α æquales. β Erunt ergo æquales *g* & *h* ad centra γ æqualiū *b*, *e* ad peripheriam dupli & segmenta *abc*, *def* δ similia;

& super æqualibus basibus *ac*, *df* æqualia.

Æqualibus ergo peripherijs *abc*, *def*, ablati ex totis circulis æqualibus, relinquentur peripheriæ *ac*, *df* æquales. Quod erat propositum.

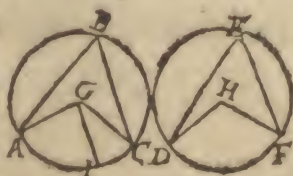
PRO-

PROPOSITIO XXVII.

Theorema, 24.

In æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs *ac, df* insistant, sunt inter se æquales, siue ad centra *agc, dhf*, siue ad peripherias *b, e* constituti insistant.

Sin minus, esto angulus g angulo h maior, cui æqualis æ fiat agi. Erunt ergo etiam bases ai pars & df vel ac totum β æqualia. Quod γ absurdum.



α 23. l.
β 26. III
γ 9. ar.

PROPOS: XXIIIX.

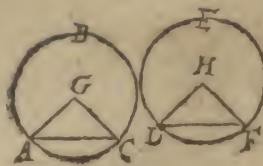
Theorema, 25.

In æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ *ac, df* æquales peripherias auferunt, maiorem quidem *abc* maiori *def*, minorem autem *aic* minori *dkf*.

Ex terminis linearum inscriptarum æqualium ducantur semidiametri, α Erunt ergo anguli g, h æquales, qui etiam æqua-
libus

26. III.

3. ax.



libus & insistent peripherijs a ic,
d k f. Quibus ablatis ab æqua-
libus circulis, reliquæ peripheriæ
sunt & æquales a b c, d e f.

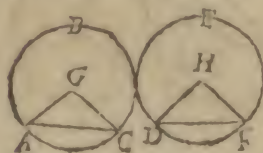
PROPOS: XXIX.

Theorema 26.

In æqualibus circulis, æquales
peripherias a b c, d e f æquales rectæ
lineæ a c, d f subtendunt.

27. III.

4. l.



Ductis semidiametris a g,
g c, d h, h f. Erunt æ equalibus
angulis g & h oppositæ bases
a c, d f inter se & æquales. Quod
erat propositum.

PROPOS: XXX.

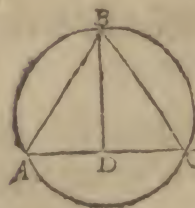
Problema 4.

Datam peripheriam a b c bifari-
am secare.

11. I.

4. l.

28. III.



Ex puncto medio d subten-
sæ a c æ erigatur perpendicularis b d
& ducantur b c, b a, quæ inter se &
æquales etiam æquales peripherias
a b & b c subtendunt. Secta ergo
est peripheria bifariam in b.

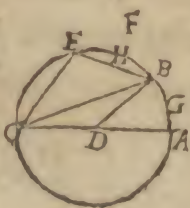
PRO-

PROPOS: XXXI.

Theorema 27.

In circulo angulus abc qui in semicirculo aec rectus est: qui autem in maiore segmento bac , minor recto: qui verò bec in minore segmento, maior est recto. Et insuper angulus gbc maioris segmenti, recto quidem maior est, minoris autem segmenti angulus hbc minor est recto.

Quoniam α aequales sunt anguli dab, abd & dbc, bcd ; erunt bini conjuncti, binis β aequales, abc & bac cum acb , quibus duobus γ aequalis est externus cbf ; ac proinde

 $\alpha 5.1.$ $\beta 4. ax.$ $\gamma 23.1.$

abc est δ rectus: Angulus autem a in maiori segmento recto: minor. Sed angulus c in segmento minori recto ζ maior. Cum deniq; angulus abc rectus sit tantum pars anguli segmenti maioris gbc ; & angulus segmenti minoris hbc tantum pars recti cbf ; erit ille maior, hic minor recto. $\eta 9. ax.$

 $\delta 13.1.$ $\epsilon 17.1.$ $\zeta 22. III.$

PROPOS: XXXII.

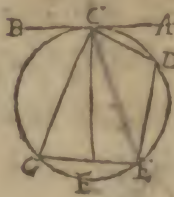
Theorema 28.

F

Si

Sicirculum tetigerit aliqua re-
cta linea ab , à contactu c autem
producatur quædam recta linea
 ce circulum secans: angeli ace , ecb
quos ad contingētem facit, æqua-
les sunt ijs, qui in alternis circuli se-
gmentis consistunt, angulis d & g .

α 31. III. &
18. III.
 β 32. I.
 γ 21. III.
 δ 3. ax.



Ducantur cf diameter & fe .
Cum α recti sint anguli cef , fca , &
 efc , ecf recti β æquales; ablato
communi ecf , anguli efc , γ id est
 egc in majori segmento, & ace e-
runt æquales. Horum æqualium δ æqualia erunt
complementa ad duos rectos, anguli ecb & d in
segmento minore æquales.

PROPOS: XXXIII.

Problema 5.

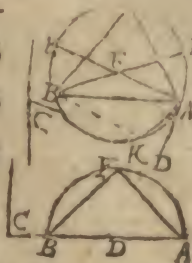
Super data recta linea ab descri-
bere segmentum circuli, quod capi-
at angulum æqualem dato angulo
rectilineo c .

α 23. I.
 β 11. I.

Super recta ab α fiat ad a angulo c dato æ-
qualis d a b , β erigaturq; perpendicularis ae ex a
ipsi ad b & rursus angulo eab æqualis fiat abf ;
erunt

erunt a f, b f, *æquales*. Ex f ergò intervallo f a *γ* 6.1.
descriptum segmentum a e b super a b, angulo d a b
alternum capiet angulo dato c *æqualem*. Comple-
to enim circulo: Quia a d est d Tan-
gens, ad ipsam factus angulus d a b
dato c *æqualis*, & *æqualis* est angulo
a g b in alterno segmento. Quod erat
faciendum.

δ cor. 1
• 32.11



2 Cor. 16. III.
32. III.

Si angulus datus C sit rectus,
super $a b$ data tanquam diametro
describitur semicirculus, qui angulum \angle rectum
capit.

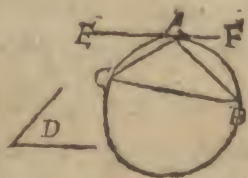
§ 31. III.

PROPOS: XXXIV.

Problema 6:

A dato circulo segmentum ab-
scindere, capiens angulum æqualem
dato angulo rectilineo *d*.

Recta e a f tangat cir-
culum in a, & ad a u fiat angu-
lò dato d æqualis e a c. β Erit
ergò in alterno segmento angu-
lus b angulo. e à c, id est, angulo dato d
æqualis.


$$\begin{array}{l} \alpha \ 23.1. \\ \beta \ 32.111. \end{array}$$

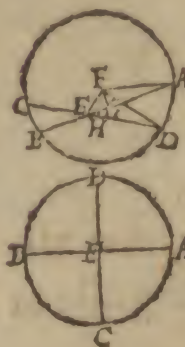
F 2 PRO.

PROPOSITIO XXXV.

Theorema 29.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ab ,
 cd sese mutuò secuerint, rectangu-
 lum comprehensum sub segmentis
 ae, eb unius, æquale est ei, quod sub
 segmentis alterius de, ec comprehē-
 ditur, rectangulo.

æ 12. l.
 β 3. lll.
 γ 5. lll.



δ 47. l.

ε 3. ax.

Ex centro f demittantur per-
 pendiculares fg, fh , quæ illas lineas
 β æqualiter secant in g & h , ducatur
 q_3 fe . Erit ergò rectangulum ex
 ae, eb , unà cum quadratis eg &
 gf vel ef , æquale quadratis ag &
 gf seu quadrato semidiametri af .
 Sic etiam rectangulum ex ce, ed ,
 unà cum quadratis eh & hf seu ef , æquale
 quadratis ch & hf seu quadrato semidiametri
 fd . Ablato ergò utrinq; ex rectangulis quadrato
 fe communi, residua rectangula ex inæqualibus
 segmentis sunt æqualia.

Si in centro secant se duo diametri, planum
 est, quod ex segmentis æqualibus seu semidiametris
 fiant æqualia quadrata.

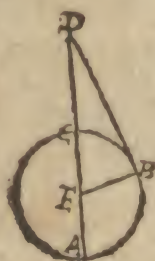
PRO.

PROPOS: XXXVI.

Theorema 30.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod d , ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera da quidem circulum secet; altera db verò tangat: Quod sub tota secante da & exterius inter punctum & convexam peripheriam assumpta dc comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à Tangente db describitur, quadrato.

Transcat primò secans ad per centrum e , ducaturq; ac perpendicularis Tangenti db . β Erit rectangulum sub tota ad cum adjecta & adjecta cd , unà cum quadrato dimidia ec aequale quadrato ed ex dimidia



α 18. III.

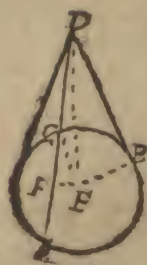
β 6. II.

& adjecta, id est, quadratis db , be . Sublati quadratis æqualibus semidiametrorum be & ec , γ erit rectangulum ex ad & dc aequale quadrato Tangentis db . γ 3. ax.

Deinde non transcat secans da per centrum, & ducantur eb , ed , ec & ef perpendiculares. β Erit rursus rectangulum ex ad & cd , unà cum

F 3

qua-



quadrato fc equale quadrato ex fd ,
 additoq; quadrato communi cf , æ-
 quale erit rectangulum ex ad & cd ,
 unà cum quadratis fc & fe , id est,
 quadrato ec , quadrato de , seu qua-
 dratis dh , be . Ablatis equalibus
 quadratis be & ce , relinquuntur & equalia rect-
 angula ex ad , dc & quadratum Tangentis db .

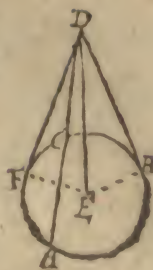
PROPOS: XXXVII.

Theorema 31.

Si extra circulum sumatur pun-
 ctum aliquod d , ab eoque puncto in
 circulum cadant duæ rectæ lineæ,
 quarum altera da circulum secet, al-
 tera db in eum incidit; sit autē quod
 sub tota secante ad & exterius inter
 punctum & convexam peripheriam
 assumpta dc , comprehenditur rectan-
 gulum, æquale ei, quod ab incidente
 db describitur, quadrato; incidens
 ipsa db circulum tanget.

36.III. Ducta Tangente df , & semidiametris ef ,
 eb , ed . * Erit quadratum Tangentis d æqua-
 le rectan-

le rectangulo ex ad & dc , β id est
 quadrato db incidentis; & d ipsi
 db equalis. Cumq; angulus b sit an-
 gulo recto δ equalis; erit db Tan-
 gens.



β ex hypot.

γ 1. ax.

δ 8.1.

e 18. III.



EUCLIDIS

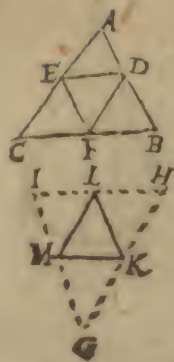
ELEMENTORUM

LIBER IV.

Definitiones.

I.

Figura rectilinea $fd e$ in figura re-
 ctilinea abc describi dicitur, cum
 singuli figuræ descriptæ anguli,
 F 4 singu-



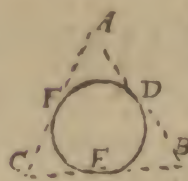
singula latera ejus, in qua describitur, tangunt.

2. Figura $g h i$ circa figuram $k l m$ describi dicitur, cum singula descriptæ latera, singulos angulos ejus, circum quam describitur, tangunt.

3. Figura rectilinea $a b c$ in circulo describi dicitur, cū singuli figuræ descriptæ anguli peripheriam circuli tangunt.



4. Figura rectilinea $a b c$ circa circum descripti dicitur, cum singula descriptæ latera circuli peripheriam tangunt.



5. Circulus in figura rectilinea describi dicitur, cum circuli peripheria singula latera ejus, in qua describitur, tangit.

6. Circulus circa figuram rectilineam describi, aut figura rectilinea circulo circumscribi dicitur, cum circu-

circuli peripheria singulos angulos
ejus, circa quam describitur, tangit.

7. Recta ab in circulo a-
ptari dicitur, cum ejus ex-
trema in circuli periphe-
ria fuerint.



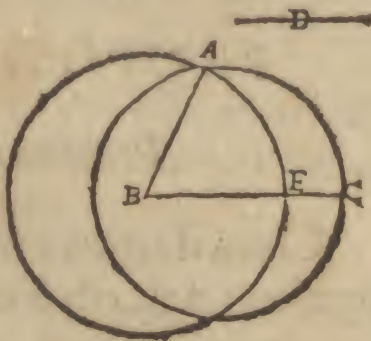
PROPOSITIO I.

Problema 7.

In dato circulo rectam lineam
accommodare, æqualem datæ rectæ
lineæ d , quæ circuli diametro non sit
major.

Cum enim dia-
meter inscriptarum
in circulo sit maxi-
ma, major ipsa inscri-
bi non potest: sin ipsi
sit æqualis, quævis di-
ameter ducta erit a-
ptata: Sin minor,
intervallo lineæ datæ

d , describatur circulus super bc diametro circuli
dati, & connectatur b cum a . β Erit hæc lineæ β 15. def. 1.
circulo aptata æqualis datæ. & 1. ax.



15. III.

F. 5

PRO.

EVCLIDIS ELEM:
PROPOSITIO II.

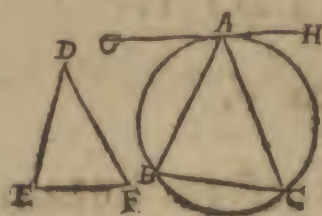
Problema 2.

In dato circulo triangulum describere, dato triangulo *d e f* æqui-
angulum.

α 23. 1.

β 32. III.

γ 32. 1.



Ad ductæ Tangentis

*g h punctum a. fiant an-
guli g a b ipsi f, & h a c
ipsi e æqualis; connectan-
turq; b c. β Erit ergo an-
gulus c æqualis angulo*

*g a b, id est angulo f, & angulus b angulo e; γ
& angulus b a c angulo d, triangulum inscriptum
a b c, triangulo d e f æquiangulum.*

PROPOSITIO III.

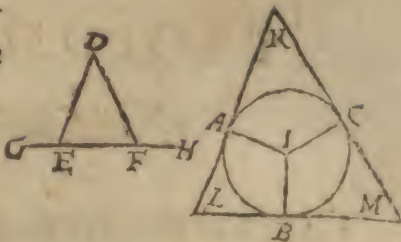
Problema 3.

Circa datum circulum *a b c* tri-
angulum describere, dato triangulo
d c f æquiangulum.

α 23. 1.

*Productæ utrinq; trianguli basi in g & h, an-
gulis externis α fiant æquales ad centrum i; a i b
ipsi d e g; & b i c ipsi d f h: ad extremitates
verò semidiametrorum a, b, c ducantur perpendi-
culares*

culares vel β tangen-
tes, quæ concurrent in
k, l, m. Ergò in qua-
drilateris quatuor an-
gulorum rectis quatu-
or æqualium (propter



β 16. III.

resolutionem in duo triacula) cum duo oppositi
sint γ recti; reliqui etiam duo duobus rectis æqua-
les erunt. Cumq; a i b ipsi d e g, & b i c ipsi
d f h æquetur, δ æquabitur l ipsi d e f & m ipsi d f e
& k ipsi d. Circumscriptum ergò est Triangu-
lum dato æquiangulum.

γ ex constr.
 δ 15. I & 3. ax.

ϵ 32. I.

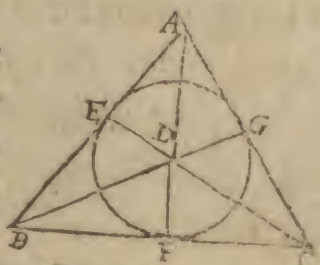
PROPOS: IV.

Problema 4.

In dato triangulo a b c circulum
inscribere.

α Secentur duo anguli bisariam per lineas a. 9. I.
duas, ex quarum intersectionis puncto d β demis. β 12. I.

tantur perpendicu-
lares ad latera singula, ea-
rumq; intervallo describa-
tur circulus. Erunt ergò in
triangulis edb, bdf latera
de, df γ æqualia, & in tri-



angulis; f d c, & c d g latera f d, g d. δ Tres ni-
mirum æquales ex puncto d: quod ϵ crit centrum ϵ 9. III.
circuli singula latera trianguli ζ tangentis vel in-
scripti.

γ 26. I.

δ 1. ax.

ϵ 9. III.

ζ cor. 16. III.

P R O.

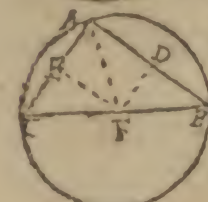
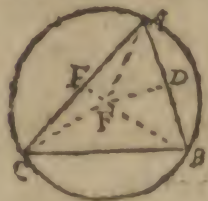
PROPOSITIO V.

Problema 5.

Circa datum triangulum abc circulum describere.

10. l.

14. l.
79. ill.



Duo quævis latera a dividantur bisariam per lineas perpendiculares concurrentes in f , ex quo ad angulos singulos ducantur lineæ, illarumq; intervallo describatur circulus. Erunt ergò fa, fb, fc æquales, & ex f centro descriptus circulus circa triangulum datum.

Corollarium 1.

1. ill.

Si centrum f cadat in latus, a erit triangulum rectangulum, quia in semicirculo: Si intra, erit acutangulum, quia in majori segmento: Si extra, obtusangulum, quia in minori segmento.

Corollarium 2.

Per data tria puncta non in eadem

dem recta linea existentia, circulum describere licet per hanc propositionem. Connexis enim punctis tribus habeo triangulum.

Scholion.

Cuius figura regulari quæ & æquilatera & æquiangula est, circulus tum α inscribitur inter-
 α 4. IV.
 vallo perpendicularium concurrentium; tum β cir-
 β 6. I.
 cumscribitur, intervallo angulos duos quosq; bise-
 riam secantium.

PROPOS: VI.

Problema 6.

In dato circulo quadratum de-
 scribere.

Ducantur duo diametri ad
 angulos rectos se α intersecantes, co-
 rumq; extremitates jungantur re-
 ctis a b, b c, c d, d a. Quatuor
 angulis ad centrum β rectis, & æqua-
 les sunt quatuor arcus quibus insistant, & his sub-
 tensa quatuor latera δ æqualia. Anguli etiam
 omnes sunt in semicirculo ϵ recti. Ergo ζ quadra-
 tum a b c d inscriptum.



α 11. I.

β ex const.

γ 26. III.

δ 29. III.

ϵ 31. III.

ζ 29. def. I.

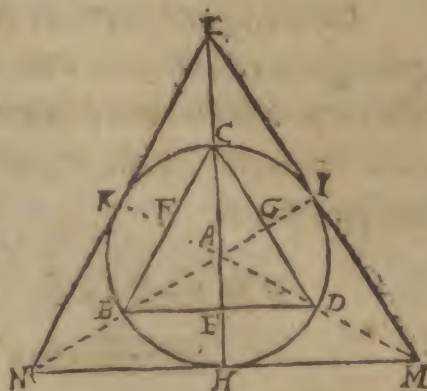
LEMMA.

Figura regularis circa circulum
 descri-

describitur à perpendicularibus lm ,
 ln , nm ab extremitate semidiamet-
 rorum h, i, k latera figuræ prius in-
 scriptæ bc, bd, cd bifariam dividenti-
 um in e, f, g excitatis.

per aliquā
 prop. IV.

Inscribatur in
 circulo figura equi-
 latera & equian-
 gula, qualis requi-
 ritur, & per ipsius
 angulos ex centro
 utring, continuen-
 tur lineæ ad peri-
 pheriam in h, i, k



8.1.

& ultra peripheriam in l, m, n , & secantes angulos
 & latera datæ figuræ bifariam, & tres ad centrum
 efficientes æquales bad, dac, bac . Deniq, ad ex-
 tremitates h, i, k & excitentur perpendiculares lm ,
 ln, nm . Cum itaq, æquales sint anguli $a b e$
 $a n h$; & ade, amh , id est, toti n & b, m & d ;
 l & c ; erit figura l circumscripta equiangula.
 Deinde in triangulis anm, aml, anl æqualium
 angulorum, & æqualia etiam erunt inter se latera
 am, al, an ; quæ comprehendunt angulos æqua-
 les, etiam bases inter se & æquales efficiunt nm ,
 ml, ln , figuram quæsitam constituentia.

7.1.
 29.1.

2. ax.
 1. ax.
 6.1.

4.1.

PRO-

PROPOS: VII.

Problema 7.

Circa datum circulum, quadratum describere.

α Inscripto prius quadrato, aliud etiam β circumscribetur.



α 6. IV.

β per Lemma ejusdē.

PROPOS: IIX.

Problema 8.

In dato quadrato circulum describere.

Constructio & demonstratio est ex 4. IV.

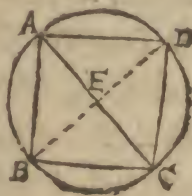


PROPOSITIO IX.

Probl. 9.

Circa datum quadratum circulum describere.

Constructio & demonstratio est ex scholio 5. IV.



Scholium.

Estq; quadratum circumscriptum inscripti α 47. l.
 α duplum, quia illud ex diagonio inscripti vel diametro fit, tanquam ex hypotenusa.

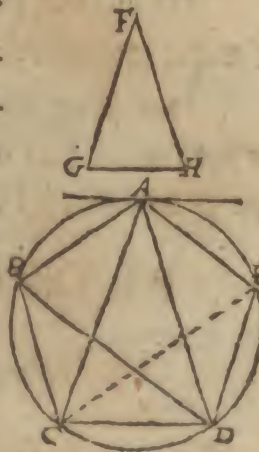
PRO-

PROPOSITIO XI.

Problema. II.

In dato circulo, pentagonum æquilaterum & æquiangulum inscribere.

Constructo triangulo Isosceli fgh , cujus anguli ad basin g & h sunt dupli tertij f : β inscribitur circulo dato æquiangulum acd , & anguli ad γ 9.1. basin γ secantur bisariam per lineas db, ce & ducantur rectæ ab, bc, cd, de, ea . Insistent ergo quinque anguli d æquales ace, ecd, adb, bdc, cad : æqualibus peripherijs quinque totum circulum comprehendentibus quibus 2 æqualia subtensa quinque latera sunt pentagoni inscripti æquilateri; quod & æquiangulum est, quod omnes ipsius anguli æqualibus peripherijs circuli insistant.



ex constr.

26. III.

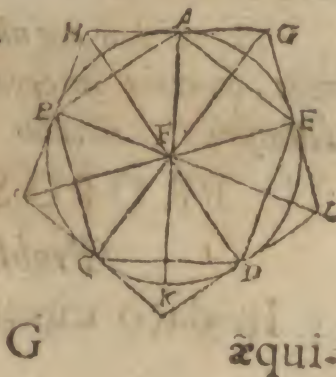
29. III.

27. III.

PROPOS. XII.

Probl. 12.

Circa datum circulum; pentagonū



æqui-

æquilaterum & æquiangulum describere.

α 11. IV.

α Inscripto prius pentagono, circumscribetur aliud per lemma sextæ hujus.

PROPOSITIO XIII.

Problema 13.

In dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inscribere.

α 9. I.

β scho. 5. IV

Duo quicq; anguli proximi α secantur bisariam per lineas fi, fk, quarum concursu f intervallo perpendicularis f c circulus perit inscriptus.

PROPOSITIO XIV.

Problema 14.

Circa datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum circulum describere.

α 19. I.

β scho. 5. IV

Iterum duo anguli α secantur bisariam per lineas, quarum intervallo ex illarum concursu β circumscribitur circulus.

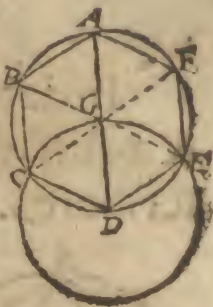
PROPOSITIO XV.

Problema 15.

In dato circulo hexagonum & æqui-

æquilaterum & æquiangulum inscribere.

Ducto diametro circuli a d, ex d describatur alius priori equalis circulus secans priorem in c & e punctis, per quæ ducantur diametri e b, c f, itemq; a b, b c, c d, d e, e f, f a. Erunt triangula c g d & d g e æquilatera & æquiangularia, & anguli ad centrum omnes & æquales, vel $\frac{1}{2}$ duorum rectorum. Ideoq; omnes & æqualibus insistent peripherijs, quibus æquales lineæ, id est, latera hexagoni sex æqualia subtenduntur, quæ etiam æquales includunt angulos sex, æqualibus peripherijs insistentes. Hexagonum ergo & æquilaterum & æquiangulum est inscriptum.



α 15. def. 1.

β 5. 1.

γ 32. & 15. 1.

δ 26. III.

ε 29. III.

ζ 27. III.

Corollarium.

Latus Hexagoni æquale est semidiametro ejusdem circuli. Circulo autem dato circumscribetur hexagonum per Lemma 6. IV. Circulus ipsi inscribetur & circumscribetur per scholion 5. IV.

G 2

PRO-

PROPOSITIO XVI.

Problema 16.

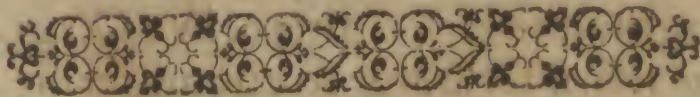
In dato circulo quindecagonum
& æquilaterum & æquiangulum de-
scribere.



2. IV.
3. II. IV.

29. III.
27. III.

Inscribatur in circulo da-
to æ triangulum æquilaterum
& pentagonum. Cum ergo la-
trigeni ab $\frac{1}{3}$ vel $\frac{5}{7}$; latus autẽ
pentagoni ac $\frac{2}{5}$ quatuor re-
ctorum: illorum duarum pe-
ripheriarum differentia e b
habet $\frac{2}{5}$; Ipsius ergo dimidium erit $\frac{1}{5}$, cui sub-
tensum latus e i est quindecagoni æquilateri & æ-
quianguli latus. Ejusdem circumscriptio fiet per
Lemma 6. IV. Ipsi autem & inscribetur &
circumscribetur circulus per
Schol. 5. IV.



EU-



EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER V.

Definitiones.

I.

Ars est magnitudo magnitudinis, minor majoris, cum minor metitur maiorem.

2. Multiplex autem est major minoris, cum minor metitur maiorem.

Intelligitur hic pars aliquota, quæ aliquoties præcisè continetur in toto, quod ejus multiplex est. Ideoque & æquemultiples sunt magnitudines, quæ multitudine æquales partes habent.

3. Ratio, λόγος, est duarum magni-

G 3

tudi-

itudinum, ejusdem generis, *numeri cum numero, lineæ cum lineâ*, mutua quædam secundum quantitatem habetudo *quatenus una est major altera, vel minor, vel æqualis.*

4. Analogia, proportionalitas vel proportio, est rationum similitudo. *Vt enim magnitudines, ita earum rationes inter se comparantur.*

5. Rationem inter se habere magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ sese mutuò superare.

6. In eadem ratione dicuntur esse magnitudines, prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æquemultiplicia, à secundæ & quartæ æquemultiplicibus, qualiscunq; sit hæc multiplicatio, utrumq; ab utroque vel unà deficiunt, vel unà æqualia sunt, vel una excedunt, si ea sumantur, quæ inter se respondent. *Multiplex primæ cum multiplice secundæ; & tertiæ cum quartæ multiplice. Complectitur autem definitio etiam magnitudines tres, si media bis sumatur.*

7.E.

7. Eandem autem habentes rationem magnitudines, proportionales vocentur.

8. Cum verò æque multiplicium multiplex primæ magnitudinis excesserit multiplicem secundæ; at multiplex tertiæ non excesserit multiplicem quartæ, tunc prima ad secundam maiorem habere rationem dicetur, quàm tertia ad quartam.

9. Analogia ad minimum in tribus terminis consistit. *Ut haberipossint duo Antecedentes & duo consequentes.*

10. Cum tres magnitudines proportionales fuerint, prima ad tertiam duplicatam rationem, *multiplicata in sese vel quadratè ratione primæ ad secundam*, habere dicitur ejus, quam habet ad secundam: at cum quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima ad quartam triplicatam, *cubicè in se multiplicata ratione primæ ad secundam*, rationem habere dicitur ejus quam habet ad secundam: & semper deinceps uno amplius, quam

G

4

diu

du proportio extiterit. *Loquitur de finitio tantum de cō. in uia proportiona-
litate.*

11. Homologæ seu similes ratione magnitudines dicuntur, Antecedentes quidem Antecedentibus, consequentes verò consequentibus. *Ante proportionem dixerat rationum similitudines: nunc ejus terminos etiam dicit similes. Sequuntur jam sex argumentandi modi Geometris usurati.*

12. Alterna ratio est sumtio Antecedentis ad Antecedentē, & consequē-
tis ad consequentem. *Oportet hęc omnes terminos esse ejusdē generis. Non n. si sit ut numerus ad numerum, sic linea ad lineam, rectē collegeris alternē, ut numerus ad lineam; sic numerus ad lineam.*

13. Inversa ratio est sumtio consequentis tanquam Antecedentis, ad Antecedentem tanquam consequentem.

14. Compositio rationis est sumtio Antecedentis cum consequente ceu
unius

unius, ad ipsam consequentem vel compositio rationis est sumtio terminorum simul ad alterutrum eorundem. Et contra, est sumtio alterutrius termini ad compositum ex utrisque. *Hic in compositione rationum tantum intelliguntur termini: ipse rationes in 5. def. VI.*

15. Divisio rationis est sumtio excessus, quo consequentem superat Antecedens, ad ipsam consequentem. Vel est sumtio excessus termini majoris supra minorem, ad ipsum minorem: Et contra minoris ad excessum majoris.

16. Reversio rationis est sumtio Antecedentis ad excessum, quo Antecedens superat consequentem. Vel est sumtio termini majoris ad excessum supra minorem. Et contra, excessus terminorum ad ipsum majorem.

17. Ex æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his alia multitudine pares quæ binæ su-

G s man-

mantur, & in eadem ratione: cum ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam; sic & in secundis magnitudinibus prima ad ultimam sese habuerit. Vel, Est sumtio extremorum per subductionem mediorum. *Hi modi argumentandi demonstrantur in aliquot propositionibus.*

18. Ordinata sive directa proportio est, cum fuerit, quemadmodum Antecedens ad consequentem; ita Antecedens ad consequentem; fuerit etiam, ut consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.

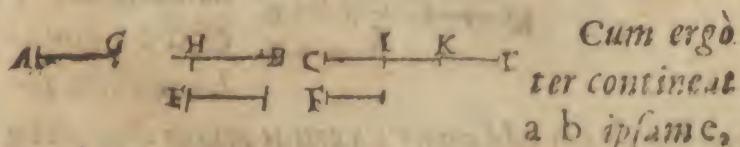
19. Perturbata autem proportionalitas est, cum tribus positis magnitudinib. & alijs, quæ sunt his multitudine pares, ut in primis quidem magnitudinibus se habet Antecedens ad consequentem; ita in secundis magnitudinibus Antecedens ad consequentem: ut autem in primis magnitudinibus consequens ad aliud quidpiam; sic in secundis magnitudinibus

gnitudinibus aliud quidpiam ad Antecedens.

PROPOSITIO I.

Theorema I.

Si sint quotcunque magnitudines a, b, c, d , quotcunque magnitudinum, e, f , æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices a, b ipsius e, c, d ipsius f ; quam multiplex est unius e una a, b magnitudo; tam multiplices erunt & omnes a, b, c, d , omnium e, f .



& c, d ipsam f ; singulis ternis unius partibus, a, g , g, h , h, b , addantur singulæ alterius c, i , i, k , k, d .
Erunt ipsis e & f junctis ter binæ ter æquales: α 2. ax.
ac proinde β æquemultiplex totum ex a, b, c, d , totius ex e, f . β 2. def. V.
Si itaq, partes sint æquemultiplices partium, totum etiam totius est æquemultiplex.
Indeq, idem est multiplicare per partes ac per totum.

PRO-

EVCLIDIS ELEM:
PROPOSITIO II.

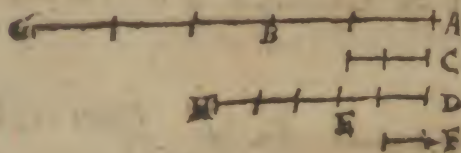
Theorema 2.

Si prima ab secundæ c fuerit æquemultiplex, atque tertia de quartæ f ; fuerit autem & quinta bg secundæ c æquemultiplex, atque sexta eh quartæ f ; erit & composita prima cum quinta ag secundæ c æquemultiplex, atque tertia cum sexta dh æquemultiplex quartæ f .

α ex hypot.

β 2 ax.

γ 2. def. v.



Si enim æqualibus multitudinibus a b & d c æquales multitudini-

nes bg & eh addantur; serunt etiam compositæ ag & dh æquales, & suarum partium γ æquemultiplices.

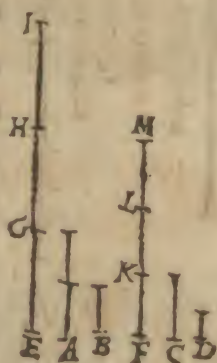
PROPOSITIO III.

Theorema 3.

Si sit prima a secundæ b æquemultiplex, atque tertia c quartæ d ; sumantur autem æquemultiplices e i , f m pri-

primæ a & tertiæ c : Erit & ex æquo sumtarum e i ad b & f m ad d utraque utriusque æque multiplex; altera e i quidem secundæ b , altera f m autem quartæ d .

Quia enim prima a , illiq; a æquales e g , g h , h i sunt æque multiplices secundæ b , atq; tertiæ c , illiq; æquales f k , k l , l m , quartæ d ; perunt etiam compositæ e i & f m earundem, secundæ b & quartæ d æque multiplices. id est, & extremè vel ex. æquali sumtæ.



α ex hypot.

β s. v.

γ 17. def. v.

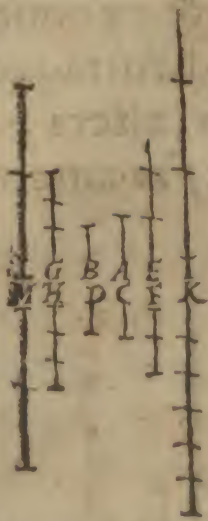
PROPOSITIO IV.

Theorema 4.

Si prima a ad secundam b eandem habuerit rationem, & tertia c ad quartam d : etiam æque multiplices primæ e & tertiæ f , ad æque multiplices secundæ g & quartæ h , juxta quamvis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si prout inter se respondent, ita sumtæ fuerint.

Aequæ

a 2. V.

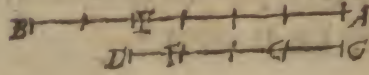


¶ 6. def. V. sumta, β fiet, si i superat l , etiam k superabit m , ut hoc loco: Cumq; eadem etiam sint aequemultiplicium $e f$ & $g h$ aequemultiplices constructæ; β Ergo ut e ad g , ita f ad h .

PROPOSITIO V.

Theorema 5.

Si magnitudo ab magnitudinis cd æque fuerit multiplex, atque ablata a & ablata $c f$: etiam reliqua $e b$ reliquæ $f d$ ita multiplex erit, ut tota ab totius cd .

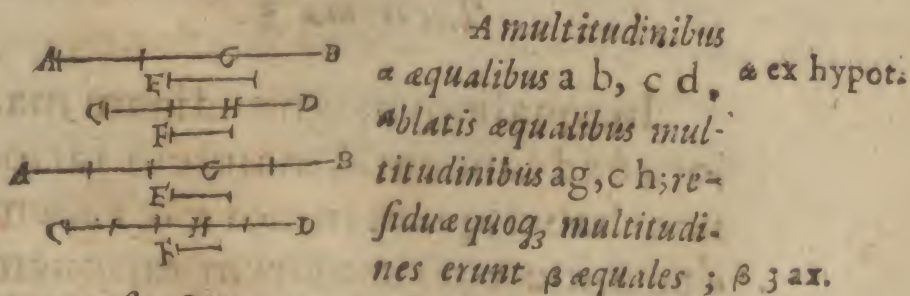
Ponatur quedam

 $g c$, cuius æque multiplex sit $e b$, atq; est ablata

lata $a e$, ablata $c f$, vel tota $a b$ totius $e d$: a erit $a l. V.$
 quoq; tota $a b$, totius $g f$ æque multiplex, atq; ab-
 lata $a e$, ablata $c f$. β eritq; $g f$ æqualis ipsi $c d$, & $\beta 6. ax.$
 ablata communi $c f$, erunt $g c$ & $f d$ æquales. Cum
 itaq; $e b$ reliqua sit tam multiplex ipsius $g c$, quàm
 multiplex est $a b$ ipsius $c d$; tam multiplex etiam
 erit $e b$ reliqua reliquæ $f d$. Quod erat propositum.

PROPOSITIO VI.

Theorema 6.

Si duæ magnitudines $a b$, $c d$ duarum magnitudinum e & f sint æque multiplices; & detractæ quædam $a g$, $c h$ sint earundem e & f æque multiplices: & reliquæ $g b$ & $h d$, eisdem e & f aut æquales sunt, aut æque ipsarum multiplices.



sive ex constructione æquales sint ipsis e & f , ut in
 priori figuratone; sive earundem æque multipli-
 ces, ut in posteriore.

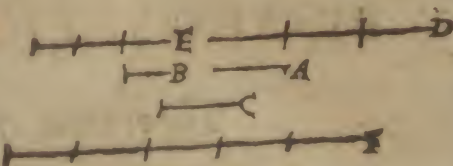
PRO-

PROPOSITIO VII.

Theorema 7.

Aequales a, b ad eandem c , eandem habent rationem; & eadem c ad æquales a, b .

Sint æqualium
 a & b æquè mul-
 tiplices d & e . *a*
 æquales, & ipsius c
 multiplex ut-
 cunq. Quia ergò multiplex d est minor multipli-
 ce f , eadem minor quoq. est multiplex e . Ideoq. a
 erit, ut a ad c , sic b ad c : & convertendo sicut c ad
 a , sic idem c ad b .



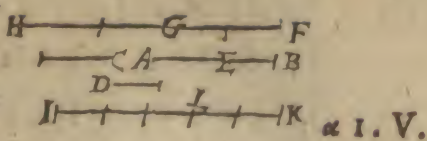
PROPOS: IIX

Theorema 8.

Inæqualium magnitudinum ma-
 jor a ad eandem d , maiorem ratio-
 nem habet, quàm minor c : & eadem
 d ad minorem c maiorem rationem
 habet, quàm ad maiorem a .

Sit major a prima, c tertia, d secunda &
 quarta

quarta; ipsiq³ c ex a b au-
feratur equalis ac, & ipsa-
rum a e vel c & e b fiant
aequemultiplices h g, g f,



quarum utraq³ major sit quàm d, & sic h f tota
etiam totius a b majoris aequemultiplex ærit, atq³
h g ipsius ac vel c. Fiat item secunda & quarta
d aequemultiplex i k, proximè major multiplice h
g, sed minor multiplice h f, & de i k abscin-
datur ipsi d equalis l k. Non erit ergò i l ma-
jor quàm h g, sed vel equalis vel minor (aliàs non
esset i k multiplex ipsius d, proximè major quam
h g) Et cum g f major sit quàm d vel l k; ideoq³
etiam tota h f major erit quàm i k. Et proinde,
cum f h, h g sint aequemultiplices primæ a b &
tertiæ c, atq³ i k multiplex d secunda & quarta:
sicq³ f h major quam i k; & h g vero minor quam
i k; major β erit proportio a b primæ ad d secun-
dam, quàm c terciæ ad d quartam. Et conver-
tendo, cum terciæ d multiplex i k sit major mul-
plice primæ h g; & ejusdem d terciæ multiplex ea-
dem i k minor h f multiplice quartæ: ideoq³ d ma-
jorem habet rationem ad c, quàm ad a b. Quod
erat propositum.

β 3. def. V.

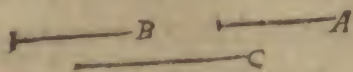
PROPOSITIO IX.

Problema 9.

Quæ a & b ad eandem c, eandem
H ha-

habent rationem, æquales sunt inter se: & ad quas a & b eadem c eandē habet rationem, eæ quoque sunt inter se æquales.

α 8. V.



Si a major esset quàm b , a esset major majoris a proportio ad

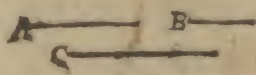
c , quàm b minoris ad eandem, contra hypothesein. Ideoq; non sunt inæquales. Rursus, si c habeat eandem rationem ad utramq; a & b , etiam æquales sunt. Sin minus, esto a major, tum c ad b minorem, maiorem haberet rationem, quàm ad a , quod est contra hypothesein.

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Ad eandem magnitudinem c rationem habentium, quæ a maiorem rationem habet, illa major est: ad quam b autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est.

α 7. V.



Nisi enim a maiorem habens rationem ad c , quàm b ad c , esset major b , foret vel æqualis, & sic contra hypothesein æ haberet eandem rationem.

rationem ad c, vel minor, & sic b ad c maiorem
 ꝑ haberet rationem, quàm a contra hypothesin. β 8. V.
 Vice versa, si c habeat rationem maiorem ad b,
 quàm ad a, rursus erit major a, quàm b: sin minus,
 erit ipsi vel æqualis & contra hypothesin. erit ipsius
 c ad utramq, eadem ratio; vel minor, & sic major
 erit ratio c ad a, quàm ad b, contra hypo-
 thesin.

PROPOSITIO XI.

Theorema 11.

Quæ eidem sunt eadem ratio-
 nes, inter se sunt eadem.

Sumantur & An-

tecedentium a, e, c,

æquè multiples g, h,

i; & consequentium

b, f, d, æquè multiples k, m, l.

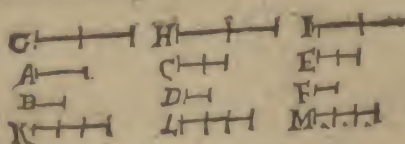
Quia ergò est, ut
 a ad b, sic e ad d, & fiet; si g superat i, etiam k
 superet m, & si æqualis, æqualis; & si minor, mi-
 nor sit. Quia etiam est, ut e ad f, sic c ad d; fiet
 etiam, si h superat i, etiam m superet l & si æqua-
 lis, æqualis; & si minor, minor. Cum ergo æquè
 multiples directè sunt a, habeant hanc triplicem
 conditionem, excessus, æqualitatis & defectus, & erit,
 ut a ad b, sic e ad f.

H 2

PRO-

Theorema 12.

Si sint magnitudines quotcunq;
proportionales a, b, c, d, e, f ; quemad-
modum se habuerit una a Antece-
dentium, ad unam b consequentium;
ita se habebunt omnes anteceden-
tes a, c, e , ad omnes consequen-
tes b, d, f .



Sumantur æque
multiplices tum An-
tecedentium a, c, e ,
quæ sint g, h, i ; tum

α 1. V.

consequentium b, d, f , quæ sint k, l, m : α Erit com-
posita g, h, i , composita k, l, m æquè multiplex, & a
ipsius b . Cumq; sit, ut a ad b , sic c ad d & e ad f ,
β fiet; si g superat k , etiam h superet l & i superet
 m ; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor: Atq;
ita g, h, i , simul ad k, l, m simul triplicem illam
conditionem β recipiant. Ideoq; ut a ad b ; sic
omnes antecedentes a, c, e ad omnes consequen-
tes g, d, f .

β 6. def. V.

PROPOS: XII.

Theorema 13.

Si prima a , ad secundam b , can-
dem habuerit rationem, quam ter-
tia

tia c ad quartam d ; tertia verò ad quartam maiorem rationem habuerit, quàm quinta e ad sextam f : prima quoque ad secundam, maiorem rationem habebit, quàm quinta ad sextam.

Sumantur æquè multiples tùm Antecedentiũ a, c, d , quæ sint g, h , i tùm consequentiũ b, d, f , quæ sint k, l, m , ut in præcedente propositione.

Quia ergò eadem est ratio a ad b , quæ c ad d : sed \propto 6. def. V. c ad d maior est ratio, quàm c ad f : \propto fiet, si g superet k , etiam h superet l , sed i quandoq; deficiat ab m . Atq; ita, cum g superet k , l non superet m , β habebit a ad b maiorem rationem, quàm e ad f .

PROPOS: XIV.

Theorema 14.

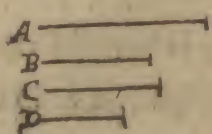
Si prima a , ad secundam b , eandem habuerit rationem, quam tertia c ad quartam d ; prima verò quàm tertia maior fuerit, erit & secunda maior quàm quarta. Quod si prima fuerit æqualis tertiæ, erit & se-

H - 3

cun-

cunda æqualis quartæ: si verò minor,
& minor erit.

α 8. V.
β 10. V.

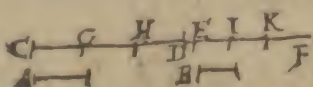


Sit a major quàm c : Ergò
 a habet maiorem rationem a ad b
quàm c ad b . & cum sit, ut a ad
 b , ita c ad d ; β erit etiam c ad d
major ratio, quàm c ad b & d erit minor quam
 b . Ob easdem etiam rationes quarta est major se-
cunda, si tertia major sit prima; æqualis etiam,
si æqualis.

PROPOSITIO XV.

Theorema 15.

Partes a, b , cum pariter multi-
plicibus cd, ef , in eadem sunt ratione,
si, prout sibi mutuò respondent, ita
sumantur ut a ad b , sic c ad d et e ad f .



α 12. V.

Cum ergò partes æque
multiplicium numero sint
æquales, cg, gh, hd ipsius a ;
 ei, ik, kf ipsius b ; quæ erit ratio unius Antecedentium
 cg , ad unam consequentium ei ; eadem & erit
omnium cd , ad omnes ef .

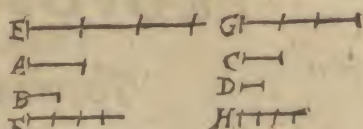
PRO-

PROPOSITIO XVI.

Theorema 16.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint *ut a ad b, sic c ad d*; & vicissim proportionales erunt *ut a ad c, si b ad d.*

Sumantur eque
multiplices primæ e,
& secundæ f; item ter-
tiæ g & quartæ h. α



Erit *ut a ad b; Sic e ad f; & ut c ad d; sic g ad h:* α 15. V.
 β Idcirco etiam, *ut e ad f: ita g ad h.* Si itaq; e β 11. V.
fuerit major quàm g, etiam f γ erit major quàm γ 14. V.
h; & si æqualis, æqualis, & si minor, minor. atque
sic, *ut a ad c, ita b ad d.*

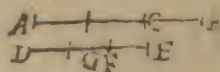
PROPOSITIO XVII.

Theorema 17.

Si compositæ magnitudines proportionales fuerint *ut a b, ad c b, sic d e, ad f e*; hæ quoque divisæ proportionales erunt, *ut a c ad c b; ita d f ad f e.*

H 4

Si e.



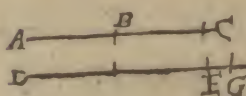
Si enim magnitudo de
non est in fecta, ut a b in
c, esto secta in g. Erunt

α 16. V. ergo duæ Antecedentes conjunctæ, hoc est a b, ad
duas consequentes, hoc est, d e, ut b c ad e g. Sed
tota a b ad e d ponebatur, ut tota d e ad e f. Itaq;
α erit, ut a b ad d e; ita b c ad e f. Quare e f æqua-
lis erit ipse e g, pars toti. Quod absurdum.

PROPOS: XIIX.

Theorema 18.

Si divisæ magnitudines sint pro-
portionales ut a b ad b c; ita d e ad e f;
etiam compositæ proportionales c-
runt, ut a c ad b c; ita d f ad e f.



α 17. V.

β 14. V.

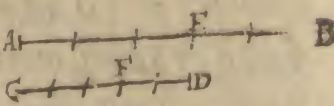
Si minus, ha-
beat d f ad aliam d g
eam rationem, quam
ac ad ab, α Erit ergo dividendo, ut a b ad b c
ita d g ad g f: Sed ut a b ad b c, ita erat d e ad
e f: Ideoq; β erit etiam, ut d e ad e f; ita d b ad
g f. Cumq; prima d e sit minor tertia d g; et-
iam secunda e f erit minor quarta g f, par totum
parti. Quod absurdum.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

Theorema 19.

Si, quemadmodum totum ab ad totum cd ; ita ablatum ae se habuerit ad ablatum ef : & reliquum eb ad reliquum fd , ut totum ad totum se habebit.

Cum igitur sint, ut ab ad cd ; ita ae ad cf ; α erit 
 eb ad fd ; ut ab ad ae ; ita cd ad cf : & β dividendo, ut eb ad ae ; ita fd ad cf
 & γ componendo, ut ab tota ad eb reliquam; ita α 16. V.
 cd tota, ad fd reliquam: & α permutando, ut β 17. V.
 ab ad cd ; ita eb reliqua, ad fd reliquam. γ 18. V.

PROPOSITIO XX.

Theorema 20.

Si sint tres magnitudines a, b, c ,
 & aliae ipsis numero æquales d, e, f ,
 quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, ut a ad b , ita d ad e ; & ut b ad c ; ita e ad f : ex æquo autem prima a quàm tertia c major fuerit & quarta d quàm

H 3

d quàm

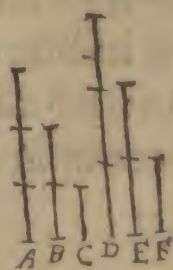
d quàm sexta *f* major. Quod si prima
a tertiæ *c* fuerit æqualis; erit & quar-
 ta *d* æqualis sextæ *f*: sin illa minor,
 hæc quoque minor erit.

α 8. V.

β 13. V.

γ 10. V.

δ 7. V.



Sit enim prima *a* major quàm
 tertia *c*; tum *a* ad *b* α habet mayo-
 rem rationem quàm *c* ad *b*; & quia
d ad *e* eandem habet rationem,
 quàm *a* ad *b*; β erit etiam major
d ad *e*, quàm *c* ad *b*, hoc est, quàm
f ad *e*: γ Ideoq; major erit *d* quarta, quàm sexta.
 Sic, si *a* est æqualis *c*, etiam *d* est δ æqualis *f*, & si
 minor, minor.

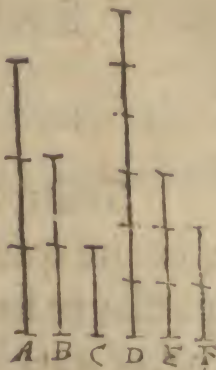
PROPOSITIO XXI.

Theorema 21.

Si sint tres magnitudines *a, b, c* &
 aliæ ipsis æquales numero *d, e, f*, quæ
 binæ, & in eadem ratione sumantur
 ut *a*, ad *b*, sic *e* ad *f*; & ut *b* ad *c*, sic *d* ad *e*;
 fueritque perturbata earum propor-
 tio; ex aquo autem prima, quàm
 tertia major fuerit: erit & quarta
 quàm sexta major. Quod si prima
 ter-

tertiæ fuerit æqualis ; erit & quarta æqualis sextæ ; Sin illa minor , hæc quoque minor erit.

Sit enim a major quàm c , & sic a ad b maiorem habet rationem, quàm c ad b ; adeoque c ad f maiorem, quàm c ad b . hoc est, quàm c ad d : eritq; d major quàm f ; Sic, si a est æqualis c , etiam d æqualis est f ; & si minor, minor.



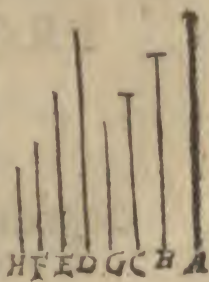
a 8 V.
 b 13 V.
 c 10 V.

PROPOSITIO XXII.

Theorema 22.

Si sint quocunque magnitudines, a, b, c , & alia ipsi æquales numero d, e, f ; quæ binæ in eadem ratione sumantur, ut a ad b , sic d ad e ; & ut b ad c , ita e ad f ; & ex æqualitate in eadem ratione erunt, ut a ad c ; ita d ad f .

Prioribus tribus adjungatur g , & posterioribus h . Sitq; ut a ad b , ita c ad g ; & ut b ad c , ita d ad e ; ita e ad f , ita f ad h ; & erit



a 16 V.

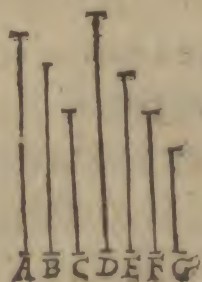
ex hypot. α erit iterum ut d ad f , ita e ad h . Cum ergo consequentes β sint in eodem ordine cum antecedentibus; Ideoque est, ut a ad c , sic d ad f .

PROPOS: XXIII.

Theorema 23.

Si sint tres magnitudines a, b, c , aliarque ipsis numero æquales d, e, f , quæ binæ in eadem ratione sumantur, ut a ad b , sic e ad f , & ut b ad c ; sic d ad e ; fuerit autem perturbata earum proportio: etiam ex qualitate in eadem ratione erunt, ut a ad c , sic d ad f .

a 61. V.
β 11. V.



Sin minus, fiat ut b ad c , ita f ad g assumptam: eritque d ad e ut f ad g , quatuor nimirum proportionales; ac proinde α ut d ad f , ita e ad g . Sed e ad g est f ut a ad c , β itaque & d ad f est, ut a ad c .

PROPOS: XXIV.

Theorema 24.

Si prima a ad secundam c eandem

dem habuerit rationem, quam ter-
tia de ad quartam f ; habuerit autem
& quinta bg ad secundam c eandem
rationem, quam sexta eb ad quartam
 f : etiam composita ag prima cum
quinta, ad secundam c eandem habe-
bit rationem, quam tertia cum sexta
 dh ad quartam f .

Quia enim

est, ut bg ad c ita e h ad f

f ; erit convertendo, ut c ad bg ; ita f ad eh . Cum-
que sit ut a b ad c , ita d e ad f ; & ut c ad bg , ita a 22. V.
 f ad eh , & erit ex aequali, ut a b, ad bg ; ita d e ad eh . Ergo, cum & componendo, ut a b ad bg ,
ita d h ad eh : & ut bg ad c , ita e h ad f ; & erit
ex aequali ag ad c , ut dh ad f .

PROPOS: XXV.

Theorema, 25.

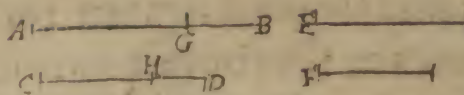
Si quatuor magnitudines pro-
portionales fuerint, ut a b ad c d; sic e
ad f : maxima a b & minima f reli-
quis duabus c d & e maiores erunt.

Ex a b equalis e auferatur a g, & ex c d
ipsi f , ch . Fit, ut ab ad cd ; sic ag ad ch ; Et ut
 a b ad

α 19. V.

β ex hypot.

γ 14. V.



ab ad cd; α sic

reliqua gb ad h

d. Cumq; β

major sit ab quàm cd, γ major erit & gb quàm h d ex similitudine rationum. Additis ergo α equalibus f & ch ad equales ag & e, equales sunt ag & f simul, ipsis e & ch simul; quibus si rursum addantur inequales gb major & h d minor, erunt ab maxima & f minima simul majores medijs cd & e simul.

Sequentes propositiones idèd hinc inter Euclideas tolerantur, quia scriptores gravissimi, Archimedes, Apollonius & Pappus ijs utuntur.

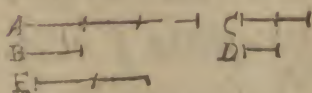
PROPOS: XXVI.

Theorema 26.

Si prima a ad secundam b habuerit maiorem proportionem, quàm tertia c ad quartam d: habebit convertendo secunda ad primam minorem proportionem, quàm quarta ad tertiam.

α 10. V.

β 8. V.



Habeat quædam e eandem rationem ad b, quam habet c ad d. Quia ergo a ad b, maiorem habet rati-

onem, quàm c ad d, id est, quàm e ad b; erit etiam a α ma-

a α major quàm e ; & b ad a minorem β habebit
rationem, quàm ad c minorem, id est, quàm d ad c .

PROPOS: XXVII.

Theorema 27.

Si prima a ad secundam b , habue-
rit maiorem proportionem, quàm
tertia c ad quartam d : habebit quoq;
vicissim prima ad tertiam maiorem
proportionem, quàm secunda ad
quartam.

Intelligatur e esse ad b , ut c ad d . Quia ergò
ad b maiorem habet rationem a quàm e ; a erit
 α major e : β maiorq; erit proportio a ad c , quàm α 10. V.
 e ad c Cumq; permutando sit, ut e ad c , ita b ad d 8. V.
 d . maiorq; sit ratio a quàm e ad c ; etiam a ad c
quàm b ad d maiorem rationem habebit.

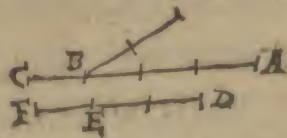
PROPOSITIO XXIIII.

Theorema 26.

Si prima a ad secundam b ma-
iorem habuerit proportionem,
quàm

quàm tertia de ad quartam ef , habebit quoque composita prima cum secunda ac , ad secundam bc maiorem proportionem, quàm composita tertia cum quarta df ad quartam ef .

G



Habeat gb rationem ad bc , quàm de ad ef , erit q_3 a ad bc maior proportio, quàm gb ad

α 10.V.
 β 8.V.
 γ 18.V.

bc , & ab α maior quàm gb . Addita ergò communi bc , fiet abc maior, quàm gbc , & maior q_3 erit proportio abc quàm gbc ad bc . Sed γ componendo; ut est gbc ad bc ita df ad ef . Major itaq₃ est proportio ac ad bc , quàm df ad ef .

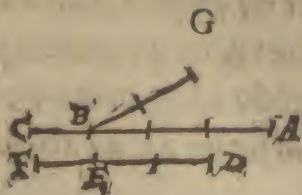
PROPOS: XXIX.

Theorema 29.

Si composita ac prima cum secunda ad secundam bc maiorem habuerit proportionem, quàm composita df tertia cum quarta ad quartam ef : habebit quoque dividendo prima ab ad secundam bc maiorem proportionem, quàm tertia de ad quartam

tam ef.

Habeat gbc ad bc
rationem, quam d f ad
ef, eritq₃ major ac, quàm
gbc ratio ad bc, & ma-
jorq₃ ac quàm g b c. Hinc ablata a communi b c, α 10. V.
major erit ab quàm g b; adeoq₃ β major propor- β 8. V.
tio a b quàm g b ad bc. Sed γ 17. V. & ex hypo.
dividendo, ut g b ad
bc, ita d e ad e f, Ergò major est proportio a b ad
bc, quàm d e ad e f.



PROPOS: XXX.

Theorema 30.

Si composita a c prima cum se-
cunda, ad secundam bc majorem ha-
buerit proportionem, quàm compo-
sita d f tertia cum quarta, ad quartam
e f: habebit per conversionem ratio-
nis, a c prima cum secunda, ad pri-
mam a b, minorem proportionem,
quam d f tertia cum quarta, ad ter-
tiam d e.

Quia enim a c ad bc
major est proportio, quàm d f
ad e f; etiam α dividendo ma-
ior



α 29. V.

I

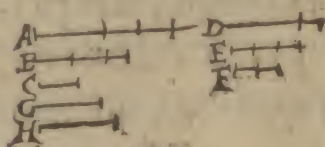
ior

- β 26. V. *jor est proportio ab ad bc, quam de ad ef. Ideoq;*
 γ 28. V. *β convertendo, minor proportio bc ad ab, quam ef*
ad de; eaq; propter γ componendo minor propor-
tio totius ac ad ab, quam totius df ad de.

PROPOS: XXXI.

Theorema 31.

Si sint tres magnitudines a, b, c ,
 & aliæ ipsis æquales numero d, e, f ,
 sitq; major proportio primæ a pri-
 orum, ad secundam b , quam primæ
 posteriorum d ad secundam e ; item
 secundæ b priorum ad tertiam c ma-
 jor, quam secundæ e posteriorum ad
 tertiam f : erit quoque ex æqualitate
 major proportio primæ a priorum ad
 tertiam c ; quam primæ d posteriorū
 ad tertiam f .



- α 13. V.
 β 10. V.
 γ 8. V.

Esto enim g ad c , ut
 e ad f , & a erit major
 ratio b quam g ad c , & ma-
 jorq; b quam g . Ideoq; γ

major erit ratio a ad g minorem, quam a ad b
 majorem. Cum autem major ponatur ratio a
 ad b , quam d ad e ; multo erit major a ad g ,
 quam

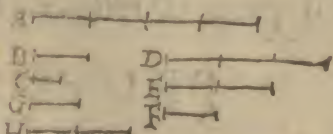
quàm d ad e . Rursus esto h ad g , ut d ad e , & erit
 a ad g major quàm h ad g , & majorq; a quàm h .
 Ideoq; ad c major a majorem habet rationem,
 quàm h . Sed ut h ad c , ita d ad f , ex æquali δ 22. V.
 (quia ut d ad e , ita h ad g , & ut c ad f , ita g ad c)
 Ergò etiam major est ratio a ad c , quàm d
 ad f .

PROPOS: XXXII.

Theorema 32.

Si sint tres magnitudines a, b, c ,
 & aliæ ipsis æquales numero d, e, f , sic-
 que major proportio primæ a prio-
 rum ad secundam b , quàm secundæ e
 posteriorum ad tertiam f ; item se-
 cundæ b priorum ad tertiam c ma-
 jor, quàm primæ d posteriorum ad se-
 cundam e : erit quoque ex æqualita-
 te major proportio primæ a priorum
 ad tertiam c , quàm primæ d postero-
 rum ad tertiam f .

Esto g ad c , ut d ad
 e , eritq; b major ratio,
 quàm g ad c , & b a ma-
 jor quàm g . & Major er-
 gò est ratio a ad g minorem quàm ad b .
 I 2 Cumq;



α 10. V.

β 8. V.

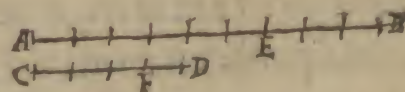
α 10. V. β 8. V. γ ex hypot.

Cumq³ a ad b sit major quàm c ad f , multò major est a ad g quàm c ad f . Rursus esto h ad g ut e ad f , eritq³ a ad g major ratio, quàm h ad g , & a major quàm h . Ideoq³ & a major quàm h ad g habet maiorem rationem. γ Sed ut h ad c , ita e ex æquali d ad f . Ergò major est etiam ratio a ad c quàm d ad f .

PROPOS: XXXIII.

Theorema 33.

Si fuerit major proportio totius ab ad totum cd , quàm ablati ae ad ablatum cf : erit & reliqui eb ad reliquum fd major proportio, quàm totius ab ad totum cd .



Quia enim
major est ratio a
 b ad cd , quàm

 α 23. V. β 30. V.

ae ad cf ; α erit etiam permutando major ratio ab ad ae , quàm cd ad cf : & per β conversionem rationis minor erit ratio ab ad eb , quàm cd ad fd . Itaq³ α permutando, minor erit ratio ab ad cd , quàm eb reliquæ ad fd reliquam.

PROPOS: XXXIV.

Theorema 34.

Si

Si sint quotcunque magnitudi-
nes a, b, c , & alia ipsi æquales nume-
ro d, e, f ; sitque major proportio pri-
mæ a priorum ad primam d posteri-
orum, quàm secundæ b ad secundam
 e ; & hæc major quàm tertiæ c ad ter-
tiam f , & sic deinceps: Habebunt o-
mnes priores simul, ad omnes poste-
riores simul majorem proportio-
nem, quàm omnes priores b, c relictæ
prima a ad omnes posteriores e, f , re-
lictæ quoque prima d ; minorẽ autem,
quam prima priorum a , ad primam
posteriorum d : majorem denique,
etiam, quàm ultimã c priorum ad
ultimam f posteriorum.

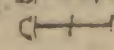
Quia enim major

est ratio a ad d ,



α 27. V.

quàm b ad e ; etiã



β 28. V.

permutando major est a ad b , quàm d ad e & β
componendo major a, b simul ad b , quàm d, e si-
mul ad e : rursumq; permutando major a, b simul
ad d, e simul, quàm b ad e . Itaq; cum ab tota ad
de totam habeat majorem rationem, quam abla-
ta b ad ablatam e , & etiam reliqua a ad reli-
quam d majorem rationem habebit, quam ab to-
ta ad de totam. Pari modo major erit ratio b
ad e , quàm bc ad ef ; ac proinde multo major a ad
I 3 d, quàm

γ 33. V.

d, quàm bc ad ef; & α permutando major ratio a ad bc, quàm d ad ef; & β componendo major abc ad bc, quàm de f ad ef; & rursus permutando, major omnium simul abc ad omnes simul de f, quàm bc ad ef. Quod est primum. Cum igitur totius abc ad totum de f sit major ratio, quàm ablati bc ad ablatum ef; erit etiam reliqui a ad reliquum d major, quàm totius abc ad totum de f. Quod est secundum. Quia etiam major est ratio b ad e, quàm e ad f; erit α permutando major quoque b ad c, quàm e ad f; & β componendo major totius bc ad c, quàm totius ef ad f. Cum autem major sit ratio abc ad de f, quàm bc ad ef, ex demonstratis: multò ergò major erit ratio omnium abc ad omnes de f, quàm ultimæ c ad ultimam f. Quod est tertium.

PROPOSITIO XXXV.

Theorema, 35.

Si duabus magnitudinibus *a b*, *cd* majoris in æqualitatis alix æquales *b e*, *d f* addantur; component rationem minorem *ae* ad *cf*: Sin æquales demantur *bg* & *dh*, relinquent rationem majorem *ag* ad *ch*.

¶ 14. V.

Ponatur, ut ab ad cd, ita be addi: α Erit
b e hoc

be, hoc est gb major quàm

di: & ideoq³ cd ad di mi-

norem habebit rationem

maorem, quàm ad df ma-

jorem. & Quare etiam ab ad be majorem ratio-

nem habebit, quàm cd ad df: & d componendo γ 13. V.

ae ad be majorem rationem habebit, quàm cf δ 28. V.

ad df: Sed e revertendo a e ad ab minorem ratio-

nem habebit, quàm c f ad cd. Quare & permutan- ϵ 30. V.

do ae ad cf minorem rationem habebit, quàm ab ζ 27. V.

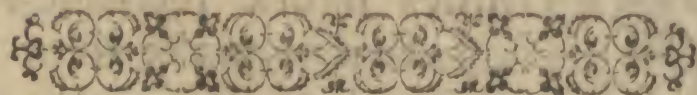
ad cd. Quod erat propositum. Eodemq³ modo

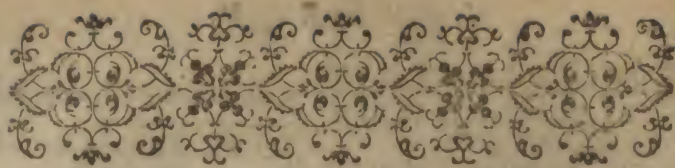
altera propositionis pars demonstratur.

Hinc patet: Data rationi aliam paulò mi-

norem majoremve dari, equalis quantitatis addi-

tione vel subtractione.





EUCLIDIS

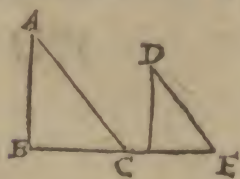
ELEMENTO- RUM

LIBER VI.

Definitiones.

I.

Similes figuræ rectilineæ sunt abc, dec , quæ & angulos singulos singulis æquales habent $a, d; b, c; c, f$; atq; etiã latera quæcircũ æquales angulos, proportionalia, ut

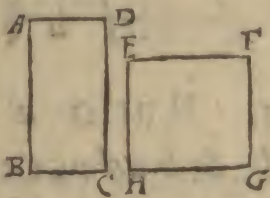


los, proportionalia, ut $ab ad bc$; ita $dc ad ce$.

Utraq; enim hæc in figurarum similitudine, & æqualitatem angulorum, & proportionalita-

litatem laterum oportet cōcurrere. Ideo q̃
etiam tantum habet locum in ejusdem
speciei figuris, circulis & circulis, quadra-
tis & quadratis, &c.

2. Reciproca figuræ sunt $abcd$ & e
 fgb cum in utraque
figura antecedentes
 ad, bg & consequentes
 eh, bc rationum termi-
ni fuerint. Hic nulla
sequitur figurarum similitudo.



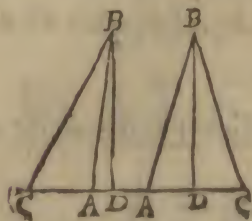
3. Secundum extremam & medi-
am rationem recta linea secta esse
dicitur, cum ut tota ad majus se-
gmentum; ita majus ad minus se,
habuerit.

Extrema & media ratione est in ex-
tremum & medium terminum dividi.
Quæ præ in 30 propos. docebitur & a-
lijs verbis in 11.11. est tradita. Ex usu au-
tem maximo in stereometria potissimum,
quod libro 12. constabit, dicta est divina
hæc proportio.

4. Altitudo bd cujusque figuræ
 abc est linea perpendicularis à verti-

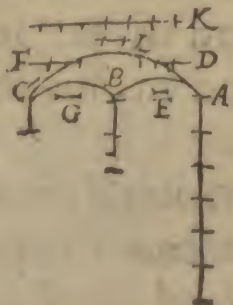
I s ceb

ce ba ad basin ac deducta. Hinc æque altæ dicuntur figure quarum perpen-



diculares sunt æquales, ita enim etiam consistere possunt intra duas parallelas sua basi & vertice.

5. Ratio a ad c ex rationibus a ad b , & b ad c componi dicitur, cum rationum a ad b & b ad c quantitates denominatores d ad e & f ad g , inter se multiplicatæ d in f & e in g , aliquam effecerint rationem a ad c .



Quantitas rationis est denominator proportionis dictus, quod indicet quanta sit magnitudo antecedens respectu consequentis. Ex duabus ergo vel pluribus rationibus

componi dicitur ratio, quando ipsarum denominatores inter se multiplicati eam efficiunt. Ut duodecupla componatur ex dupla & sextupla, quia denominator duodecuple proportionis producitur ex mul-

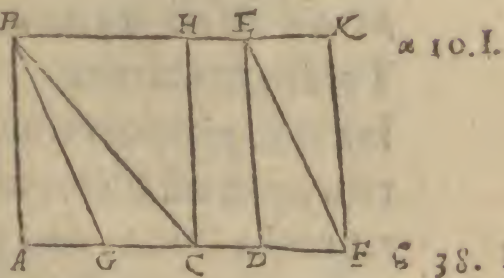
multiplicatione denominatorū duplæ. & sextuplæ 6. Ideoq̃ quocunq̃ magnitudinibus ordine positis, ratio extremorum componitur ex rationibus intermediarum.

PROPOSITIO I.

Theorema I.

Triangula abc , item def parallelogramma $ahdk$, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, ut bases abc ad def , & ah ad dk , ut ac ad df .

Est basis ac dupla ad basin df , & a secetur bisariam in g , connectaturq̃ g ad b . Erunt Triangula abg gbc & def β equalia & Triangulum abc duplum Trianguli def , videlicet ut basis ac ad basin df , ita Triangulum abc ad Triangulum def . Quod primum est. Ita β 41. I. etiam cum parallelogramma ah & dk sint 2 dupla Triangulorum abc & def ; derit ut abc ad def ita parall. ah ad dk parall. Quare etiam ut basis ac ad basin df , ita parall. ah ad parall. dk . δ 15. V. ϵ 11. V. Quod est secundum.



Hinc

Hinc patet Corollarium. Triangula item parallelograma quæ æquales habēt bases, sunt ut altitudines. Si enim bases sumantur pro altitudinibus, tum ex prima hujus patet propositum.

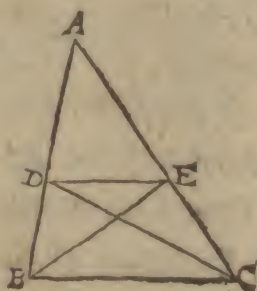
PROPOS: II.

Theorema 2.

Si ad unum Trianguli abc latus bc parallela ducta fuerit recta quædam linea de , hæc proportionalitate ut ad ad db , ita ae ad ec secabit ipsius Trianguli latera. Et si Trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ ad sectiones adjuncta fuerit recta linea, de , erit ad reliquum ipsius Trianguli latus bc parallela.

α 37. l.
 β 7. V.

ϵ 1. VI.
 δ 11. V.



Ducantur rectæ be , cd .
Est enim ut α equalia Triangula dbe & dce β ad Triangulum dae ; & ita bases bd ad da , & ce ad ea . Quod est primum. Et rursus: ut basis bd ad basin da ; & ita bed ad eda γ d: Qua-

d: Quare Triangula bed & ced erunt æqualia, § 9. V.
 & eritq; de ipsi bc parallela: Quod est secundum. § 39. I.

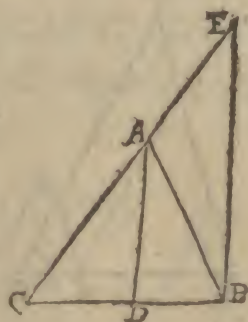
PROPOS: III.

Theorema 2.

Si Trianguli bac angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea ad secuerit & basin: basis segmenta bd , ad dc eandem habebunt rationem, quam reliqua ipsius Trianguli latera ba ad ac . Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius Trianguli latera; recta linea, quæ à vertice ad sectionem producitur, bifariam secat Trianguli ipsius angulum.

Per punctum b agatur ipsi ad parallela be , concurrens cum ca producta in e . Quia ergo sunt æqualiter anguli dab & abe ; dac & e ; erunt quoq; his opposita latera ea & ab æqualia, Quare & ut ea , hoc est ba ad ac , ita bd

ad dc . Quod primum, Rursus etiam est, ut bd ad dc ita



æ ex hypot.
 & 29.
 § 2. VI.

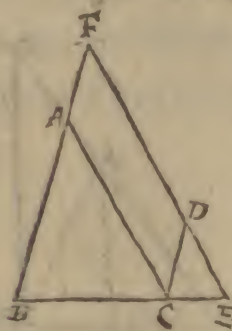
§. I.

de ita ba vel ea ad ac ; erunt rectæ ba & ea & æquales anguli eba & bad , & dac erunt & æquales. Angulus nimirum a bifariam est sectus per da . Quod erat propositum.

PROPOS: IV.

Theorema 4.

Acquiangulorum abc, def Triangulorum proportionalia sunt latera, ut ab ad bc ; ita cd ad de , ut bc ad ca ; ita ce ad ed , ut ba ad ac ; ita cd ad de , quæ circum æquales angulos, b & d & e , bca & e , a & d , & homologa sunt latera, ab ad de , bc ad ce , ac ad de , quæ æqualibus angulis bca & ea & cd , b & dce , subtenduntur.



Sint bases bc & ce Triangulorum & secundum angulorum & secundum angulorum æqualitatem similiter positorum, in directum. & concurrant ba & ed productæ in f . Quia ergo anguli dce & b , item acb & e sunt æquales, erunt parallele bf & cd ;

item ac & ef , & $acdf$ parallelogrammum. Erit ergo ut ba ad af , & hoc est, cd , ita bc ad ce ; & permutando ut ab ad bc , ita dc ad ce . Rursus erit.

æ 28. I.
 β 34. I.
 γ 2. VI.
 δ 7. V.
 ι 16. V.

erit etiam, ut bc ad ce , ita fd ad hoc est, ac ad de , & permutando ut bc ad ca , ita ce ad ed .
Erit ergo etiā ex æquali, ut ab ad ac , ita cd ad de . § 22.V.

Corollarium.

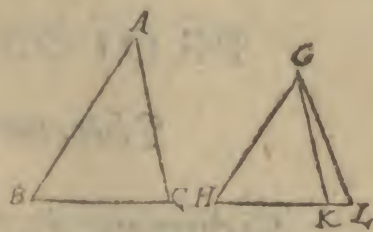
Hinc patet: Recta ac uni laterum fe Trianguli bfe parallela, aufert Triangulum bac . § 29.I.
Simile toti bfc & æquales enim sint anguli f & a , & c . VI.
 e & c & b communis. Quare latera θ proportiona- 1. def. VI.
lia & ipsa Triangula: similia.

PROPOSITIO V.

Theorema 5.

Si duo abc , hgc Triangula latera proportionalia habeant, ut ab ad bc , ita gh ad hk , ut bc ad ca , ita hk ad kg , ut ba ad ac , ita hg ad gk . æquiangularia erūt Triangula, a & g , b & h , c & k , & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera bc ad hk , ac ad gk , ab ad gh subtenduntur.

Conversa precedentis. Si Triangulo abc non Triangulum hgc , sed hgl esset æquiangularia: & Essent ergo gh



ad hl , β sicut & gh & hk , ut ab ad bc ; & hl β ex hypot. æquale ipsi hk ; totum parti. Quod absurdum. § 9.V.

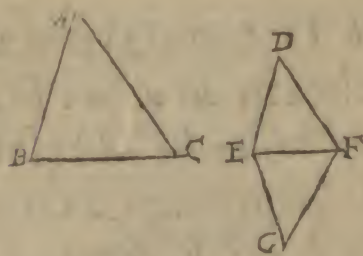
PRO-

PROPOS: VI.

Theorema 6.

Si duo abc, def Triangula unum b angulum uni e angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia, ut $a b$ ad bc , ita de ad ef , habuerint: æquiangulara erunt Triangula, æqualesque habebunt a & d, c & f angulos, sub quibus homologa bc ad ef , ab ad de , latera subtenduntur.

α 23. l.
 β 32. l.
 γ 4. VI.
 δ ex hypot.
 ϵ 9. V.
 ζ 4. l.



Ad e erecta pun-
 ctæ e & f fiant anguli
 æquales angulis b & c
 β Erit etiam g æqualis
 a ; & Triangula abc
 & efg æquiangulara. γ

Ideoq, ut ab ad bc , ita ge vel de ad ef ; eruntq;
 ge & de æquales; & reliqui anguli reliquis an-
 gulis, & Triangula abc, def æquiangulara.

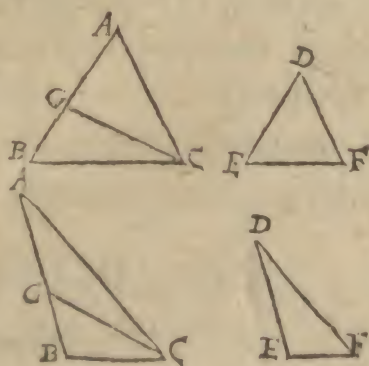
PROPOSITIO VII.

Theorema 7.

Si duo abc, def Triangula unum
 a an-

angulum uni d æqualem, circum
autem alios angulos c & f latera pro-
portionalia habeant; ut ac ad cb , ita
 df ad fe : reliquorum verò simul u-
trumque b & c aut minorem, aut non
minorem recto: Aequiangula erunt
Triangula, & æquales habebunt eos
angulos, c & f , circum quos propor-
tionalia sunt latera.

Esto primùm u-
terq; tertius angulus b
& e acutus. Si abc &
 def non sunt æquian-
gula: fiat angulus agc
æqualis angulo e ; β
erit ergò bgc obtusus,
& ut d ad fe , ita ac
ad cg & cb & sic gc
& cb , anguliq; ad basin bg sunt æquales; obtusus
acuto Quod absurdum. Idem absurdum sequitur,
si b & e anguli sint obtusi.



a 23 l.
 b 13. l.
 γ 4. VI.
 d ex hypot.
 e 5. l.

PROPOSITIO IIX.

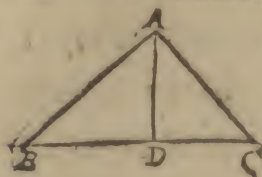
Theorema 8.

Si in Triangulo abc rectangulo,
ab angulo a recto in basin bc perpen-
dicu-

K

dicu-

dicularis ad ducta sit: quæ ad perpen-
dicularem Triangula bda & adc tum
toti bac Triangulo, tum ipsa inter se
similia sunt, bda & adc .



Quia enim bac & bda
rectangula præter angulum
rectum & communem habent
 b , etiam tertius, tertio est æ

æ 32. I.

β 4. VI.

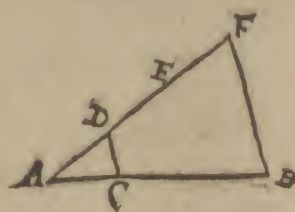
γ 1. def. VI

æqua'is, & Triangula, illa sex equiangula late-
rag, & habent circa æquales angulos proportionalia,
laterum homologia observata, videlicet, ut cb ad
 ba , ita ab ad bd ; & ut ba ad ac , ita bd ad
 da . Itaq, sunt & similia Triangula. Eadem etiam
Triangula cæst demonstratio.

PROPOSITIO IX.

Problema I.

A data recta ab linea imperatam
partem auferre ag .



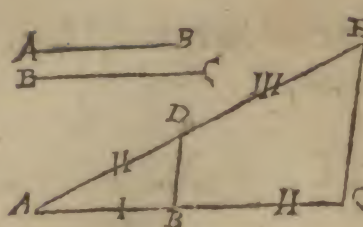
æ 31. I.

γ 2. VI.

γ 18. V.

Auferenda sit pars tertia,
Ex a ergò ducatur sub quovis
angulo recta infinita ac , ex
quæ auferantur tres æquales
partes ad , de , ef , & f conne-
ctatur cum b , cui per d agatur æparallelæ dg . Erit
 ag pars tertia desiderata. Quia enim est, & ut
 ad ad df , in ag ad gb ; erit & componendo; Vt tota
 af ad

α 31. I.
β 2. VI.



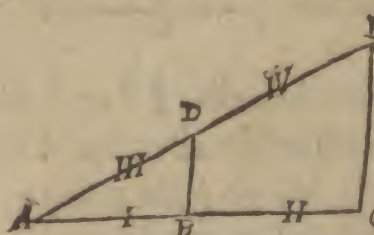
in finita ae, à qua ab-
scindatur a d equalis
ipsi bc ductæq; db a-
gatur ce & parallela per
c. β Erit ergò, ut ab pri-
ma ad bc secundam; ita

huic equalis ad, ad de tertiam quæsitam.

PROPOSITIO XII.

Problema 4.

Tribus datis lineis, quartam pro-
portionalem invenire.



Data duæ ab pri-
ma, & bc secunda po-
nantur in directum, &
quovis angulo cae du-
catur recta infinita, in
qua sumatur tertia ad

α 31. I.
β 2. VI.

ductæq; db parallela ce per c & agatur. β Erit ut
ab prima, ad bc secundam; ita ad tertia, ad de
quarta in quæsitam.

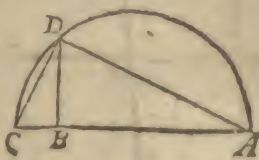
PROPOSITIO XIII.

Problema 5.

Duabus ab, bc, datis rectis, me-
diam

diam proportionalem adinvenire.

Date duæ rectæ ab , bc ponantur in directum, & super tota ac describatur semicirculus adc , & erigaturq; ex b perpendicularis bd , & ducantur ad , cd . Erit ergo adc in semicirculo rectus; & db perpendicularis efficit duo Triangula abd & cbd & æquiangula. Ideoq; & proportionalia, Vt ab ad bd , ita bd ad bc . Est ergo bd media proportionalis.



α 11. I.
 β 31. III.
 γ 8. VI.
 δ 4. VI.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 9.

Æqualium, & unum abc uni ebg æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, bd , bf , reciproca sunt latera, ut ab ad bg ; ita eb ad bc quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum bd bf unū abc angulum uni ebg angulo æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia bd , bf .

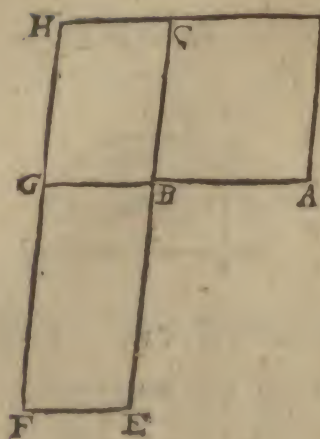
Ponantur anguli æquales ita, ut fiant verti-

K 3 cales

¶ 14. I.

§ 7. V.
 § 1. VI.
 § 2. def. VI.

¶ 1. VI.
 § 9. V.



¶ 14. I. *Deales ad b, & ita a in directum erunt ab, bg, item bc, & be: compleaturq; gnomon ahe. Habebunt æqualia parallelog. bd & bf § eandem rationem ad bh, quam bases ab ad bg, & be, ad bci. e. sunt & reciproca. Contra sint latera circum æquales angulos ad b reciproce proportionalia, ut ab ad bg, ita be ad bc, erunt parall. bd & bf æqualia. Habent enim bd & bf ad bh eandem rationem. Ideoq; sunt & æqualia.*

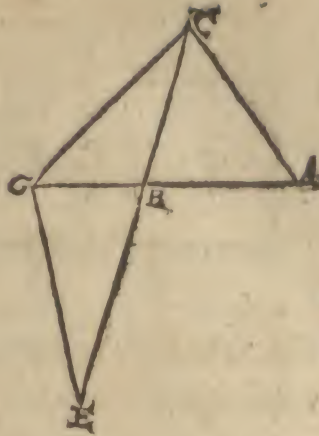
PROPOSITIO XV.

Theorema 10.

Aequalium, abc , ebg , & unum abc uni ebg æqualem habentium angulum, Triangulorum, reciproca sunt latera, ut ab ad bg , ita eb ad bc , quæ circum æquales angulos. Et quorum Triangulorum abc , ebg , unum angulum abc uni ebg æqualem habentium reciproca sunt latera, ut ab ad bg ; ita eb ad bc , quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.

Dea

Demonstratio cum
priore coincidit, quod Pa-
rallelogrāna sint Triā u-
lorum dupla. Rursum er-
gō anguli aequales fiant
verticales, ut ab, bg &
cb, be sint α in directum,
& ducatur cg. Erit
ut aequalia Triangula abc
& eb g ad Triangulum
cbg, & ita bases erunt ad bases, & ut ab ad bg, ita
eb ad bc, id est, reciprocē. Et contra: Lateri-
bus datis reciprocis vel sabibus, Erit ut aequales
rationes datae basiū ab ad bg, vel eb ad bc, ita
triangulum acb, vel bgc ad triangulum bcg;
Ideōq, triangula acb & b e g, erunt aequalia.
Quod erat ostendendum.



α 14. I.
 β 7. V.

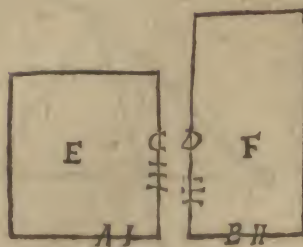
γ 1. VI.
 δ 11. V.

ε 1. VI.
 ζ 9. V.

PROPOS: XVI.

Theorema 11.

Si quatuor rectæ lineæ *a, b, d, c* pro-
 portionales fuerint: ut *a ad b*; ita *d ad c*
 quod sub extremis *a & c* comprehen-
 ditur rectangulū *e*, æquale est ei, quod
 sub medijs *b & d* comprehenditur,
 rectangulo *f*. Et si sub extremis *a & c* cō-
 prehensum rectangulū *e* æquale fue-
 rit ei *f*, quod sub medijs *b & d* conti-
 netur, rectangulo: illæ 4. lineæ rectæ
a, b, ac proport. erūt ut *a ad b*, ita *d ad c*.



¶ 3. de f. VI.
¶ 4. VI.

Quia enim, 4. data rectæ proportionales, ut a ad b , ita d ad c ; ponitur in duobus rectangulis e & f , circa æquales rectos & reciprocos; erunt rectangula e & f æqualia.

Et contra rectangula e & f æqualia habebunt circa æquales angulos latera reciproce proportionalia, ut a ad b , ita d ad c ; & ut a ad d , ita b ad c . Idem de Rhombo & rhomboide verum est in hac & sequenti proportionem.

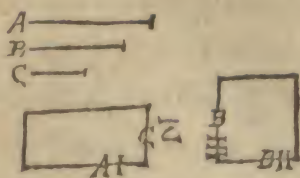
PROPOS: XVII.

Theorema 12.

Si tres rectæ lineæ sint proportionales: ut a ad b ; ita b ad c ; quod sub extremis a & c comprehenditur rectangulum e , æquale est ei, quod à media b describitur, quadrato f ; Et si sub extremis a & c comprehensum rectangulum e æquale sit ei, quod à media b describitur quadrato e : illæ tres rectæ lineæ a , b , c , proportionales erunt ut a ad b ; ita b ad c .

Quia

Quia enim media proportionalis b bis est ponenda erunt ut in precedente propositione 4. rectæ circum angulos æquales



rectos & reciproè proportionales. Ideoq; rectangula α & β æqualia. Et contra, æqualia rectangula circa angulos rectos habent latera reciproè proportionalia, videlicet, ut a ad b, ita eadem b ad d. Quod erat ostendendum.

$\alpha 2. \text{ def. VI.}$

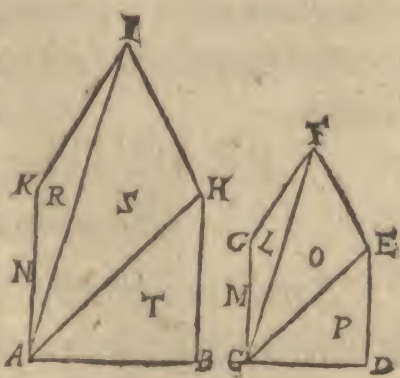
$\beta 4. \text{ VI.}$

PROPOSITIO XIIX.

Problema 6.

A data recta a b linea dato rectilineo c d e f g m simile similiterque positum rectilineum a b b i k n describere

Rectilineum datum m resolvatur in Triangula per lineas occultas ce, cf, ex eodem angulo c. & Fiant æquales angulis dce quidem hab, & d ipse b; erunt Triangula a b h & c d e



$\alpha 23. \text{ I.}$

K 5

β æqui-

Prop. 23.
24. V.

Prop. 2. AX.

Prop. 4. VI.
Prop. 22. V.

Prop. 1. def. VI.

aequiangula & latera γ proportionalia, ut ec ad cd , ita ha ad ab , atq; ita Triangula similia similiterq; posita (secundum eundem situm quoad latera & angulos) ita Triangulo cef super ah , fiat simile similiterq; positum Triangulum ahi . & d erit quadrangulum $abhi$, quadrangulo $cdef$ aequiangulum. Ideoq; cum ex similitudine Triangulorum, ex quib. sunt facta, sit: ut cd ad ce , & ce ad cf , ita ab ad ah & ah ad ai , ζ erit ex aequali, ut cd ad cf , ita ab ad ai , latera nimirum circa aequales angulos sunt proportionalia; & ita etiam quadrangulum $abhi$ simile est similiterq; positum quadrangulo $cdef$. Deniq; super ai simile similiterq; positum fiat Triangulo cfg Triangulum aik , quod additum quadrangulo efficit pentagonum pentagono m e aequiangulum & simile similiterq; positum. Quia enim rursus ut cd ad cf & cf ad cg , ita ab ad ai , & ai ad ak ; ζ ergo ex aequali ut cd ad cg , ita ab ad ak : atq; ita circa reliquos angulos reliqua latera sunt proportionalia; & ipsi m simile similiterq; positum Pentagonum. Quod erat faciendum.

PROPOS: XIX.

Theorema 13.

Similia abc, def Triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum. bc & ef (hoc est quadrata quae refertur) bc ad tertiã proportionem. bg .

Late-

Lateribus duobus
homologis bc & ef

æ quaratur tertia

Proportionalis bg .

ducaturq; ag . Quia

ergo est ut ab ad bc , ita de ad ef ; ergo per

mutando, ut ab ad de , ita bc ad ef ; & data ef ad

bg videlicet recipiendo circa æquales angulos b

& c . Itaq; æqualia erunt Triangula bag & def ,

ad quæ utraq; & eandem habet rationem abc ;

eam videlicet quæ est basis bc ad basin bg , id est,

primæ bc ad tertiam bg , & duplicatam rationem

homologorum laterum bc ad ef . Itaq; etiam tri-

angula bac & def habebunt rationem duplicatâ

homologorum laterum.

Hinc patet. Si tres bc, ef, bg , rectæ sint
proportionales, ut de ad $e f$, ad bg , ut est pri-
ma, bc ad tertiam, ef , ita est Triangulum ab
super primam bc , descriptum ad Triangulum
 def super secundâ ef , simile sive iliterq; descriptum:
Ita etiam Triangulum super secundam ef ad Tri-
angulum super tertiam bg .

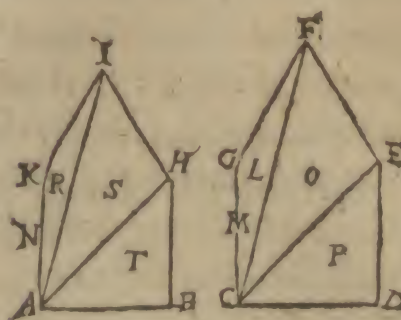
PROPOSITIO XX.

Theorema 14.

Similia polygona m & n in similia
triangula dividuntur, l & r , o & s , p & t &
numero æqualia: & homologa totis:

m & n &

& polygona duplicatam *quadratam* habent eam rationem inter se, quam latus homologum *c d* ad homologum latus *a b*.



Ab angulis equalibus *c* & *a* ad angulos oppositos *f* & *e*, *h* & *i*, ducantur lineæ dividentes polygona *m* & *n* in tria equalia Triangula *lop* & *rst*. Quæ

α 6. VI.

β 1. def. VI.

γ 22. V.

Triangula bina inter se ut *p* & *t*, quia circum æquales angulos *b* & *d* sunt latera proportionalia, sunt æ equiangulara & β similia: Ita cum sit, ex similitudine figurarum, *ec ad de* & *de ad ef*, ita *ha ad hb* & *hb ad hi*; etiam ex æquali sit, ut *ce ad ef*, ita *ah, ad hi*, latera circa residuos æquales angulos ex toto *h* ipsi æquali; α & β erunt *o* & *s* Triangula æquiangulara æquè similia ac *p* & *t*. Ita denique, α & β æquè similia sunt *l* & *r*, ut *p* & *t*. Cum ergo sint in ratione duplicata *p* & *t*, & *o* & *s* & communium laterum homologorum *ce ad ah*, Item ut *o* & *s*, sunt etiam *l* & *r* in ratione duplicata communium homologorum laterum *cf* & *ai*; erunt etiam, ut *p ad t*, ita *l ad r*, & *o ad s*. Ideoque etiā ita ut *m ad n*, ut *p ad t*, id est, Triangula similia sunt etiam homologa ipsis polygonis; Proindeq;

indeq³ ipsa etiam polygona in duplicata ratione laterum homologorum videlicet, cd ad ab . Quod erat propositum.

Hinc sequitur.

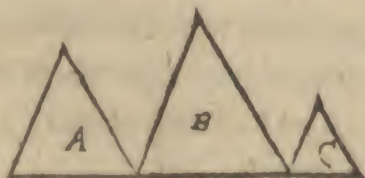
Si tres rectæ sint proportionales ut est prima ad tertiam, ita est figura super primâ descripta, ad figuram, super secundam similem similiterq³ descriptam: Et ita figura super secundam descripta, ad figuram super tertiam similem similiterque descriptam.

PROPOSITIO XXI.

Theorema 15.

Quæ eidem a & b rectilineo c sunt similia, & inter se a ipsi b sunt similia.

Quia enim utrumq³ a & b est simile tertio c , eadem erit æquiangulum, & ita a & b inter se



runt æquiangula, habebuntq³ circa æquales angulos latera proportionata. & inter se erant & similia. Quod erat propositum.

a 1. def. VI.

b 1. ax.

c 4. VI.

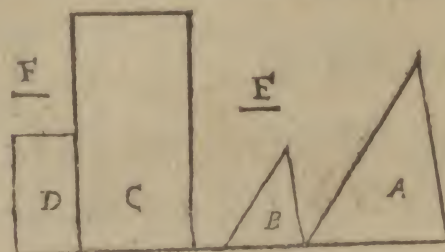
d 1. def. VI.

PRO-

PROPOS. XXII.

Theorema 16.

Si 4. rectæ proportionales fuerint, ut prima ad secundam, ita tertia ad quartam, & ab eis rectilinea similia similiterque descripta, proportionalia erunt, ut a ad b , ita c ad d . Et si à rectis lineis similia similiterque descripta proportionalia fuerint rectilinea, ut a ad b , ita c ad d : ipsæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt, prima ad secundam, ut tertia ad quartam.



Queratur prima & secunda, tertia proportionalis c , item tertia & quarta, tertia proport.

10. def. V. f. Aequalium ergò rationum primæ ad secundam, & tertiæ ad quartam, etiam duplicatæ rationes primæ a ad e , & tertiæ ad f : β a ad b & c ad d γ VI. æquales erunt. γ 6. ax.

Deinde, sint figure similes ut a ad b , ita c ad d β duplicatæ ratione homologorum laterum eadem, ut prima ad e , ita tertia ad f ; erunt etiam directæ rationes eadem, ut prima ad secundam, ita tertia ad quartam. Quod erat propositum.

PROQ

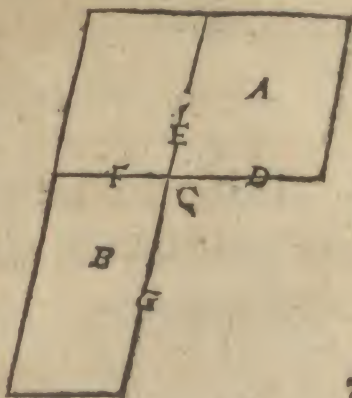
LIBER VI.
PROPOSITIO XXIII.

159

Theorema 17.

Aequiangula, *ad verticem c*, parallelogramma *a* & *b* inter se habent rationem eam, quæ ex lateribus componitur.

Compleatur parallelogrammum *h*. Quia extremorum parallelogrammorum *a* ad *b* ratio æ componitur ex intermedijs, *a* ad *h*, & *h* ad *b*, quibus β eadem sunt rationes laterum *d* ad *f* & *e* ad *g*: Itaque ex his γ rationibus laterum composita erit ratio *a* ad *b*. Quod erat propositum.



æ 5. def. VI.
 β 1. VI.

γ 11. V.

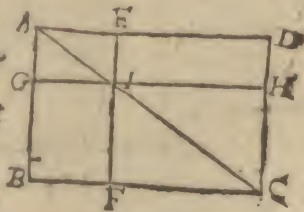
PROPOSITIO XXIV.

Theorema 18.

In omni parallelogrammo, *bd*, quæ circa diametrum *a c* sunt parallelogramma, *ge*, & *fh* & toti *bd* & inter se sunt similia.

(Diagonale est, quod & angulos & diagonium habet communem cum toto)

æ Aequales n. sunt anguli *aig* & *cai*, *cih* & *icf*; Item anguli *gai*, *aie*, *fic* & *ich*



æ 29. L.

β an.

h aequale rectilineo b, cui aequale est construendum.

Inter cd & id g β queratur media proportionalis β 13. V.

dn vel ik, super qua rectilineo a simile rectilineū 17. 18. VI.

et construatur, quod erit aequale ipsi b. Quia e δ 1. VI.

nim est, ut prima cd ad tertiam d g, ita f ad h, & 7. V.

id est, a ad b, & a ad l; etiam ex η aequali est l ζ 11. V.

aequale ipsi b, quod etiam est constructum simile ipsi η 22. V.

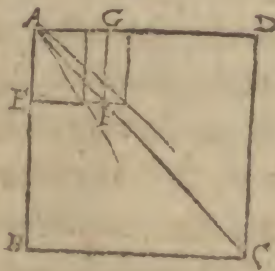
a. Quod erat faciendum,

PROPOSITIO XXVI.

Theorema 19.

Si à parallelogrammo b d parallelogrammum ablatum sit e g, & simile toti & similiter positum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum a c consistit.

Si quis e i dicat diagonale, & erit illud simile toti b d. Itaq β ut b a ad a d; ita e a ad a g, & a i aequalia partem & totum. Quod absurdum. Igitur non e i, sed e g est diagonale. Quod erat demonstrandum.



α 24 VI.

β 1. def. VI.

γ 9 V.

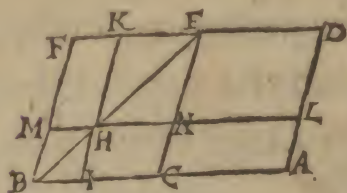
L

PRO.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema. 20.

Omniū ae , ah parallelogram-
morum ad eandem rectam ab appli-
catorum, deficientiumque parallelo-
grammis cf & im similibus similiter-
que positis, ei ae quod à dimidia ac
describitur; maximum id est ae , quod
ad dimidiam applicatur parallelo-
grammum simile existens defe-
ctui im .



*Addata ab dimi-
diam ac quodcunq, con-
stituatur parallelogram-
mum ac, & à completo
parallelogrammo af de-*

*ficiat ac simili parall. cf, dico ac esse maximū ap-
plicatorum secundum rectum ab, deficientiumq,
parallelog. similibus. Postea enim ducatur Diagonus
be in qua servatur ubicunq, punctum h, per quod
ipsis ab & b f agantur parallele lm & ki. Erit
ah deficiens parallelogr. & simili im minus ac β vel
cf. Quia enim cōplementa ch & hf sunt equalia
erit nf vel dnd, majus, quàm ch, additq, commu-
niam, erit ac totum majus toto ah. Quod erat pro-
positum.*

PRO-

α 24. VI.

β 43. I.

γ 34. I.

δ. 36 I.

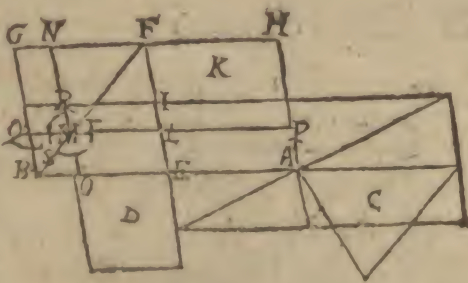
ε 9. ax.

PROPOSITIO XXIIIX.

Problema 8.

Ad datam lineam ab rectam, dato rectilineo c æquale parallelogrammum c applicare, deficiens figura parallelogramma d , quæ similis sit alteri parallelogrammo dato d . Oportet autem datum rectilineum c , cui æquale applicandum est, non majus esse eo af , quod ad dimidium applicatur, cum similes fuerint defectus & ejus, quod ad dimidiam applicatur, & ejus cui simile eg & oq deesse debet.

Super dimidia
eb fiat paralle-
logrammum eg
simile d , comple-
atur ag & du-
catur fg . si c
æquale fuerit



α 18. VI.

parallelogrammo af vel eg , factum est, quod
jabet propositio. Sin minus & a sit minus
 af , tum excessui $k\beta$ construatur æquale β 25. VI.

L. a paral-

26. VI.

parallelog. ipsi eg vel d simile similiterq₃ positum; $erit$ q₃ ln ex eg secundum communem angulum alatum diagonale ipsius eg , Completa tota figura ponq: Dico am ipsi c æquale esse.

Dex constr.

3. 2x.

43. & 36. I.

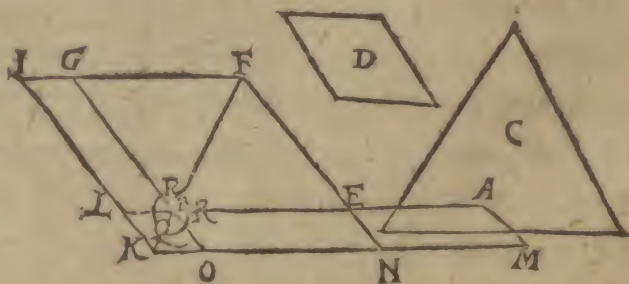
24. VI.

Ablatis enim ab d æqualibus af & c g , d æqualibus k & ln , relinquitur ai vel rectilineum c æquale gnomoni rst ; vel huic æquale parallelogrammo oq simili similiterq₃ posito ipsi eg vel dato d . Quod erat faciendum.

PROPOS: XXIX.

Problema 9.

Ad datam rectam ab , dato rectilineo c , æquale parallelogrammum ml applicare, excedens parallelogrammo ol , quod simile similiterque sitū sit alteri dato d .



18. VI.

25. VI.

Ad data ab dimidiam eb applicetur α parall. eg , simile similiterq₃ suum dato d . Deinde β fiat, paral-

parallelogrammum ni aequale duobus rectilineis
 c. & eg, simile verò eidem eg; erit eg dia- γ 26. VI.
 gonale, ipsius ni; inventa nimirum recta fi ponatur
 homologa lateri fg & compleatur figura ak
 ge. Dico ml aequale esse ipsi c.

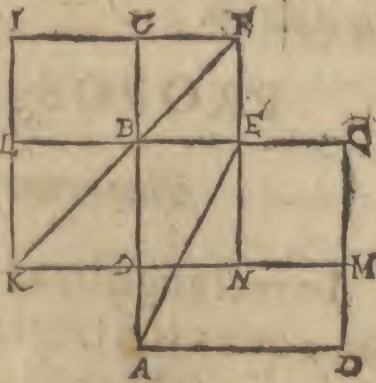
Aequalia enim erunt rectilineo c gnomon d δ ex const.
 p gr & parallelog. ml, quod excedit datā ab ϵ 36. & 43. l
 parallelogrammo ol, simili similiterq; sito, ipsi eg, & 2. ax.
 sive dato d. Quod erat faciendum.

PROPOS: XXX.

Theorema IO.

Propositam rectam ab lineam
 terminatam extrema, ac media ra-
 tione secare.

A data ab a de-
 scribatur quadran-
 gulum bd, cui ad re-
 ctam cb applicetur β
 aequale parallelogr.
 ml excedens ipsam
 cb similiter qua-
 drato ol (super di-
 midia nimirū, beco-



α 46. I.
 β 29. VI.

struatur quadratum eg, & ducatur ea, quæ erit
 latus quadrati fk, quod quadratis duobus bd &
 L 3 eg est

747.1.

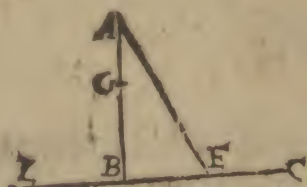
eg est γ equale. Ideoq³ ipsi ea sit similis si homologa lateri fg, & compleatur Figura, fml) Dico ab sectam esse proportionaliter.

23.21.

Si enim ab equalibus bd & lm auferatur commune mb, & relinquetur rectangulum do sub tota ad sive ab & segmento a o comprehensum equale quadrato o l facto a segmento ob. Ideoq³ tres rectæ ab, bo & oa sunt proportionales, adeoq³ ab in o ζ secta secundum mediam & extre-

17.VI.

23. def, VI. mam rationem. Quod erat faciendum.



In praxi commodissime adhibetur 11. II. ut ad datam ab ad punctum b erigatur perpendicularis æqualis bc, quæ secetur equaliter in e, intervalloq³ ea ponatur equalis el, & ipsi bl equalis bo, erit o sectio ipsius ab.

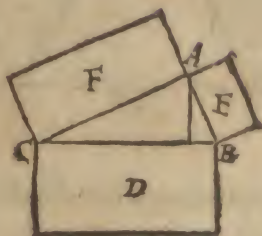
PROPOS: XXXI.

Theorema 21.

In rectangulis abc triangulis, figura d quævis, à latere bc rectum angulum bac subtendente descripta, æqualis est figuris e & f, quæ priori illi similes, & similiter positæ, à lateribus

bus ab & ac rectum angulum continentibus describuntur.

Quia enim bis ternæ sunt
 α proportionales bc, ba, bg ;
 & bc, ca, cg : erit, ut bc ad
 bg ita d ad e , item ut bc ad
 cg , ita d ad f . Est autem re-
 ctæ bc æqualis ipsis bg & gc
 simul sumtis: Ideoque & figura d æqualis erit figuris
 e & f simul sumtis. Quod erat ostendendum.



α 8. VI.
 β cor. 20. VI

PROPOS: XXXII.

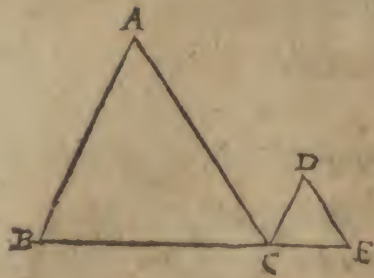
Theorema 22.

Si duo triangula, abc , dec quæ duo la-
 tera duobus lateribus proportiona-
 lia habeant, ut ba ad bc , ita cd ad de
 secundum unum angulum acd com-
 posita fuerint, ita ut homologa eo-
 rum latera sint etiam parallela ba &
 cd , ac & de : tum reliqua illorum tri-
 angulorum latera bc & cd in re-
 ctam lineam collocata reperien-
 tur.

L 4

Quia

α 29. I.
β 6. VI.



γ 2. ax.
δ 3 2. I.
ε 14. I.

Quia enim *æquales*
sunt anguli α alterni
acd, d & a; β erunt
Triangula *æquiangula*
& dce & b *æquales*;
quibus adduntur *æqua-*
les alterni acd & a,
erit totus ace duobus b & a *æqualis*; rursusq; ad-
dito communi acb, γ erunt duo acb & ace tribus
trianguli abc angulis, hoc est, duobus δ rectis *æqua-*
les. Ideoq; bases bc, ce erunt in e *directum* seu
linea una be. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XXXIII.

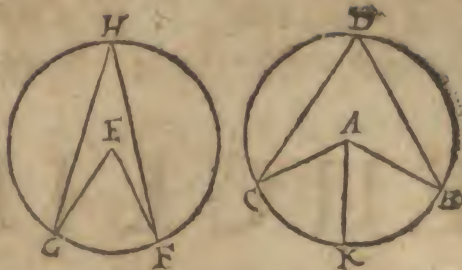
Theorema 23.

In *æqualibus* circulis, anguli e-
andem habent rationem cum peri-
pherijs bc & fg, quibus insistant, sive
ad centra bac, feg, sive ad peripheri-
as bdc, fhg constituti insistant: Insu-
per verò & sectores bca & fge, quippe
qui ad centra consistunt.

α 30. III.
β 27. III.
γ 4f. V

Sit enim duplus arcus bc ipsius fg & bca se-
cetur bisariam in f per rectam ak: Erunt anguli
bak, kac, feg *æquales*; ideoq; totus bac duplus
anguli feg, γ hoc est, ut arcus bc ad arcum fg;
ita

ita angulus ad
centrum bac
ad alterum fe
 g . Quia verò
his ad centrum
est duplis & pro-
portionales sunt



est 20. III.

est 15. V.

est 11. V.

anguli ad peripherias d & h , rursus ζ erit: ut ar-
cus bc ad arcum fg , ita angulus d ad angulum h . \approx 8. ax.

Deniq, sectores bka , kca , fge sibi mutuo congru-
entes erunt & aequales, ideoq, & sector bca duplus
erit sectoris fge , id est, θ sector ad sectorem est, ut θ 4. def. V.
arcus bc ad arcum fg .

Corollarium. 1.

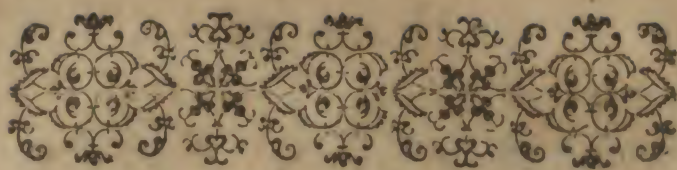
Vt angulus ad angulum, & sic se-
ctor ad sectorem. \approx 11. V.

Corollarium. 2.

Vt angulus in centro ad 4. rectos;
& ita arcus eidem angulo subtensus λ 33. VI.
ad totam peripheriam scil. 4. rectos
subtendentem.

L S

EU.



EUCLIDIS

ELEMENTO-

RUM

LIBER VII.

Definitiones.

I.



Nitas est, secundum
quam unumquodque
eorum, quæ sunt, unū
dicitur. *Ita secundū u-*
nitatem, unam dicimus
ulnam, unū corpus, &c.

Hac indivisibilis esse concipitur, ut &
punctum.

2. Numerus autem ex unitatibus
composita multitudo. *Ita 7 ex septem*
unita-

unitatibus ceu partibus constat. Quæ earundem partium ut unitatum participatio facit, ut omnes numeri sint inter se commensurabiles. Quod magnitudinibus negatum est.

3. Pars est numerus numeri, minor majoris, cum minor metitur maiorem. Ita 5 est numeri 20 pars, quæ tamen denominationem habet ab eo, per quem metitur numerum, cuius est pars, ut 5 est pars quarta 20, quia metitur illi per 4.

4. Partes autem, cum non metitur. Si nimirum minor maiorem non metiatur, ut 5 numerum 18, tum ipsius non pars sed partes dicitur, quia continet quinque unitates, quæ singulæ sunt decimæ octavæ partes numeri 18. Nomen partium est ex illis numeris, per quos communis mensura utrumque metitur, ut cum 3 metiatur & 6 partes & 9, cuius non est partes, per 2 & 3, senarius dicitur duæ tertiæ partes novenarii Euclides partes retinuit in magnitudinibus lib. V. quia non quælibet magnitudo altera gignat equalis vel
paræ

pars vel partes est, quia sepe sunt incommensurabiles.

5. Multiplex verò major minoris, cum maiorem metitur minor. *Talis est omnis qui partes habet aliquotas, Ut 9. multiplex est 3.*

6. Par numerus est, qui bifariam dividitur. Ut 24.

7. Impar verò qui bifariam non dividitur; vel qui unitate differt à pari: *Ut 3. 5. 7. Vnde indivisibilem hic intelligi debere unitatem constat, aliàs quilibet numerus esset par. Ut 3. haberet dimidium $1\frac{1}{2}$ unitatem cum semisse.*

8. Pariter par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parem; *Ut 24. est pariter par, quia 4. eum metitur per 6. parem.*

9. Pariter autem impar est, quem par numerus metitur per imparem: *Ut 24, etiam est pariter impar quia 8. metitur, illum per 3. imparem. Ideoq; multi sunt numeri, qui & pariter pares & pariter impares sunt.*

10. Impariter verò impar numerus

rus

rus est, quem impar numerus metitur per numerum imparem. *Vt 21. metitur 3. per 7.*

11. Primus numerus est, quem unitas sola metitur. *Tales sunt, qui nec pariter nec impariter pares vel impares possunt dici, ut 2. 5. 7.*

12. Primi inter se numeri sunt, quos sola unitas communis mensura metitur. *Etiam intelliguntur numeri, qui per se primi non sunt modò ut inter se præter unitatem nullam habeant communem mensuram, ut 7. 10. 15. sunt inter se primi.*

13. Compositus numerus est, quem numerus quispiam metitur. *Sic 15. est compositus numerus, quia illū 5. & 3. metiuntur. Omnes primi præter binarium sunt impares & omnes pares præter binarium compositi.*

14. Compositi autem inter se sunt numeri, quos numerus aliquis, communis mensura, metitur. *Etiam de ijs accipitur, qui per se compositi non sunt, ut 7. 14. 21 quia 7. eos metitur.*

15. Nu-

14. Numerus numerum multiplicatū redicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante unitates, & procreatus fuerit aliquis: *Vt 4 dicetur multiplicare 5, si quinarus fuerit quater compositus, quot in 4 sunt unitates, &c. Inde constat productum habere ad alterum multiplicantium eandem rationem quam alter ad unitatem, quia toties continet, quot alter continet unitates. Vt ratio 20 ad 5 est eadem, quadrupla, quæ 4 ad 1.*

16. Cum autem duo numeri mutuò sese multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui verò numeri mutuò sese multiplicarint, latera illius dicentur. Possunt enim ita procreati numeri disponi in formam parallelogrammi rectanguli, cujus latera respondent numeris inter se multiplicatis. Ita 12 est numerus planus, quia ex ductu 3 in 4 nascitur. Reliqua penè infinita planorū numerorū genera hic in Euclide nullius usus præterimus.

17. Cum

17. Cum verò tres numeri mutuò se multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, solidus appellabitur: Qui autem numeri mutuò se multiplicarint, latera illius dicentur.

Ut 1, 2, 4 efficiunt 8 numerum solidum, cujus basis bf latitudo est, longitudo bc 4, cui alia basis similis & æqualis superposita facit, ut totus numerus habeat 8 & altitudo ab duas unitates. Vnitas improprie & planus & solidus numerus appellari solet, eò quod & ex duabus unitatibus & tribus inter se multiplicatis producat.



18. Quadratus numerus est, qui æqualiter æqualis, vel qui sub duobus æqualibus numeris continetur. Ut 16. est numerus quadratus, cujus dispositio refert accuratum quadratum cuius gradus est quaternarius.

19. Cubus verò, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel qui sub tribus æqualibus numeris continetur. Sic 8 est cubus, cujus dispositio refert

refert accuratum cubum, cujus longitudo, latitudo & altitudo vel latera sint equalia, ex quarum multiplicatione numerus producitur.

20. Numeri proportionales sunt, cum primus secundi, & tertius quarti æque multiplex est; vel eadem pars, vel eadem partes: vel certè cū primus secundum, & tertius quartum æqualiter continet, eandemque insuper illius partem vel easdem partes. *Ut* $\frac{6}{3} \frac{3}{6} \frac{3}{4} \frac{4}{8}$ numeri sunt proportionales, quia primus secundi æquè duplus est, ac tertius quarti, & rursus primus secundi æquè dimidium est ac tertius quarti. Ita 5. 4. 10. 8. sunt proportionales quia primus æquè secundum continet semel cum $\frac{1}{2}$ ac tertius quartum.

21. Similes plani & solidi sunt, qui proportionalia habent latera. Cum unus planus numerus possit varijs modis disponi, non requiritur, ut in omnibus modis illa reperiatur laterum proportio, sed sufficit ut uno queat modo.

Ita

Ita similes sunt planè 6. & 24. quia laterum 2. ad 3. & 4. ad 6. eadem est proportio, etiam si 3. ad 8. in alia dispositione non habeant eandem. Similiter 9.

& 24 sunt similes solidi, quia 8. 6. 4. eandem proportionem, quam 4. 3. 2.

22 Perfectus numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis. Loquitur de parte aliquota, de qua & tertia definitio, alias omnes numeri essent perfecti futuri secundum quartam definitionem partium. Ut 6. est numerus perfectus, quia ipsius partes aliquotæ 1, 2, . . . simul sumtæ illum restitunt, ita 28 & 496. Illi in quibus partes aliquotæ simul sunt maiores, dicuntur abundantes; Diminuti, in quibus sunt minores. Ad has Euclideanas definitiones addit Clavius ex Campano sequentes.

23. Numerus numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus illum producit. Sic 2 metitur 14 per 7 quia 2 multiplicatus per 7 producit 14.

M

24. PRO-

24. Proportio numerorum est habitudo quædam unius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex vel pars, partesve; vel certè illum continet semel aut aliquoties & aliquam insuper illius partem vel partes. *Sic si numerus 24 comparetur cum 6 ea ratione quæ ipsius multiplex est, nimirum quadruplus, dicetur illa habitudo proportio.*

25. Termini, five radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportionem nequeunt summi minores.

26. Cum tres numeri proportionales fuerint; primus ad tertium duplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad secundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; primus ad quartum, triplicatam habere rationem dicitur ejus quam habet ad secundum: & semper deinceps uno amplius, quam diu proportio extiterit. *In 10. def. V. dicebantur eadem de magnitudinibus.*

27. Quot-

27. Quotlibet numeris ordine positus, proportio primi ad ultimum componi dicitur ex proportionibus primi ad secundum, & secundi ad tertium, & tertij ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio. *Eadem in def. 5. VI fuerunt declarata. Ex V. verò etiam libro possunt peti argumentorum formæ, quæ etiam hoc VI in numeris demonstrantur.*

POSTULATA.

I.

Postuletur, cuilibet numero posse quotlibet sumi æquales vel multiplices.

II.

Quolibet numero posse sumi majorem; *Quia additione unitatis numerus in infinitum augeri potest.*

M 2 AXI.

AXIOMATA.

I.

Qui numeri æqualium numero-
rum, vel ejusdem æquè multiplices
sunt, inter se sunt æquales.

II.

Quorum idem numerus æquè
multiplex est, vel æquè multiplices
sunt æquales, inter se æquales sunt.

III.

Qui numeri æqualium numero-
rum vel ejusdem eadem pars, vel
eadem partes fuerint, æquales inter
se sunt.

IV.

Quorum idem numerus, vel æ-
quales, eadem pars vel eadem par-
tes fuerint, æquales inter se sunt.

V.

Unitas omnem numerum per
unitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per
ipsummet numerum metitur. *Quia*
unitas toties sumpta, quot in ipso sunt uni-
tates, ipsum numerum constituit.

Omnis

VI

Omnis numerus seipsum metitur per unitatem. *Semel enim sumptus numerus quilibet, sibi ipsi est æqualis.*

VII.

Si numerus numerum multiplicans, aliquem produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

IIX.

Si numerus numerum metiatur, & ille per quem metitur, eundem metietur per eas, quæ in metiente sunt, unitates, hoc est, per ipsum numerum metientem. *Vt quia 3 metitur 12 per 4 metietur etiam eundem 12 4 per 3.*

IX.

Si numerus numerum metiens, multiplicet eum per quem metitur, vel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet. *Vt 3 metiens 12*

M 3 per

*per 4, multiplicatus per 4 producit 12
quem metitur.*

X.

Numerus quocunque numero metiens, compositum quoque ex ipsis metitur. *Ut quia 3 metitur 6 & 9: Ideoq; 3 metitur 15 ex 6 & 9 compositum.*

XI.

Numerus quemcunque numerum metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur. *Ut quia 3 metitur 6 qui metitur 12: Ideoq; etiam 3 metitur 12.*

XII.

Numerus metiens totum & ablatum, metitur etiam reliquum. *Ut quia 3 metitur 15 totum & 9 ablatum, ergo etiam metitur reliquum 6.*

PRO-

PROPOS: I.

Theorema 1.

Si duobus numeris ab, cd inæqualibus propositis, detrahatur semper minor cd de maiore ab alterna quadam detractiōe cd ex ab , eb ex cd ; fd ex eb , neque reliquus eb unquam metiatur præcedentem cd , quoad assumpta sit unitas gb ; qui principio propositi sunt numeri, ab & cd primi inter se erunt.

A E . . G . B
 C . . . F . . D
 H

Sin minus, metietur eas numerus, seu communis mensura ut h. Cum itaq; h a metiatur ab & cd ; cd verò metiatur ae , etiam h & β . 11. ax. β ae & eb & reliquum metietur. Cumque eb & γ 12. ax. γ eb metiatur cf , etiam b & metitur cf & ipsius & reliquum fd . Cum denique fd a metiatur eg etiam h metietur β cg & ipsius reliquum & gb unitatem numerus seu totum suam partem.

M 4

Quod

Quod absurdum. Sunt ergo inter se primi, Quod erat propositum.

PROPOS: II.

Problema I.

Duobus numeris ab, cd datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram fd invenire.

A.....E.....B

C.....E...D

G---*

α ex hypot.
 β 11. ax.
 γ 10. ax.

Detrahatur minor cd ex majore ab & residuum eb ex minore cd & ita alternatim procedendo propositum perveniatur ad numerum fd , qui precedentem eb metiatur. Erit fd communis mensura maxima. Cum enim fd α metiatur eb , & eb ipsum cf etiā fd metietur β cf ; Cumq; & seipsum etiam totum cd γ metitur. Metitur autem cd ipsum ae , ergo & fd eundem ae , & cum etiam eb metiatur, totum quoq; ab , & ita utramq; ab, cd metietur.

Quod si quis etiam maximam hanc communem mensuram esse neget, esto g major quā fd . Cum ergo g metiatur & ab & cd ; cd verō ipsum

ipsa ae ; itaq; e residuum: & cum e b me-
tiatur cf , etiam g metietur c f & residuum fd ,
major minorem, quod absurdum.

Hinc patet Corollarium. Quod numerus
metiens duos numeros etiam communem eorum
maximam mensuram metiatur. Si enim totum
& ablatum metiatur, metitur etiam reliquum,
quod communis est mensura maxima.

PROPOS: III.

Problema 2.

Tribus numeris abc , datis non
primis inter se, maximam eorum
communem mensuram d e repe-
rire.

A.....

B.....D....

C.....E..F....

Si d α inventa communis mensura a & b
etiam metiatur c erit maxima communis mensu-
ra inventa. Si enim major quædam sit quàm d ,
eadem cum metiatur a , b , c etiam communem α 2. VII.
mensuram d metitur, major minorem Quod
absurdum. Quod si d non metiatur c erunt in- β α 2. VII
ter se compositi. Proinde cum eadem mensura

α 5. com-

communis quæ a, b, c metitur, etiam β metiatur d
 β cor. 2. VII maximam mensuram a & b , & erit c mensura
 α 2. VII. communis ipsius d & c , etiam communis maxima
 mensura numerorum a, b, c . Quia enim c metitur
 c & d , d verò a & b , & metietur etiam c ipsos a
 & b . Caterum quod maxima communis mensu-
 ra sit c patet, si aliam fesse velimus: Tum enim
 metiens a & b , β metiretur etiam d eorum com-
 munem mensuram: & cum metiatur d & c , etiam
 horum communem mensuram c metiretur. Non
 igitur esset hæc major. Atq; ita c est communis
 mensura maxima trium numerorum a, b, c . Quod
 erat faciendum.

Vnde nascitur Corollarium, quod numerus
 metiens tres numeros, communem etiam illorum
 mensuram metiatur.

PROPOS: IV.

Theorema 2.

Omnis numerus omnis numeri
 minor a , majoris b , aut pars est, aut
 partes.

A

B

A

B



A.....

B.....

C...

Si a & b sint inter se primi, minoris a unitates erunt partes majoris b . Si sint compositi, & a metiatur b , a erit ipsius pars. Si a non metiatur b , sed c , β sit communis eorum mensura quoties α 3. def. VII numerum c continet b , tot partes continere dicetur b numeri a . Sic patet propositum. β 2. VII

PROPOSITIO V.

Theorema 3.

Si numerus a numeri bc pars fuerit, & alter d alterius ef eadem pars: & simul uterque a & d , utriusque bc & ef simul eadem pars erit, quæ unus a unius bc .

A.....

D....

B..... G..... C E.... H.... F

Quia enim eadem pars est a ipsius bc , quæ d ipsius ef , continebit bc tot a , i. e. bg & gc , quot d i. e. eh , hf continet ef . Itaque quot numeri a sunt in bc tot eadem numeri a & d simul sunt in bc & ef simul.

PROPOS: VI.

Theorema 4.

Si numerus a b numeri c partes fuerit,

rit, & alter *d e* alterius *f* eadem partes: & simul uterque utriusque *a b* & *d e*, *c* & *f* simul eadem partes erit, quæ unus unius *a b* ipsius *c*.

$$\begin{array}{c|c} A \dots G \dots B & D \dots H \dots E \\ C \dots & F \dots \end{array}$$

5.VL Cum aequales numero partes habeant *a b* & *d e*, quæ pars est *a g* ipsius *c* & *g h* ipsius *f*, eadem erunt *a g* & *d h* ipsorum *c* & *f*. Similiter prioribus aequales *g b* & *h e*. Itaque, uterque, *a b* & *d e* ipsorum *c* & *f* eadem partes erit, quæ unus *a b* unius *c*. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO VII.

Theorema 5.

Si numerus *a b* numeri *c d* pars fuerit, qualis ablati *a e* ablati *c f*: etiam reliquus *e b* reliqui *f d* eadem pars erit, qualis totus *a b* totius *c d*.

$$\begin{array}{c} A \dots E \dots B \\ G \dots C \dots F \dots D \end{array}$$

Si ponatur *e b* numeri *g c* eadem pars, quæ est *a e*

est ae ipsius cf vel ab ipsius cd & erit uterq; ae , eb \propto 5.VII.
 simul eadem pars utriusq; gc & cf , id est, quæ to-
 tius ab totius cd . Cum ergo ab sit eadem pars
 utriusq; gf & cd , erunt numeri æquales, à quibus
 ablato communi cf , relinquuntur gc & fd æqua-
 les. Itaq; eadem pars est eb ipsius fd , quæ ab
 ipsius cd . Quod erat propositum.

PROPOSITIO IIX.

Theorema 6.

Si numerus ab numeric d partes
 fuerit, quales ablati ae ablati cf : &
 reliquus eb reliqui fd eadem partes
 erit, quales totus ab totius cd .

A E B

G C F D

Assumpto gc , cuius eadem partes sit eb , ac a e
 ipsius cf , & erit uterq; ae , eb simul utriusq; cf & \propto 7.VII.
 gc eadem partes, quæ ac ipsius cf vel ab ipsius cd ,
 ideoq; & ab utriusq; cd & gf eadem partes e-
 rit, & fg , cd erunt æquales; communiq; adempto
 cf , gc & fd æquales erunt. Quapropter eb et-
 iam ipsius fd erit eadem partes quæ totus ab to-
 tius cd . Quod erat propositum.

PRO-

PROPOSITIO IX.

Theorema 7.

Si numerus *a* numeri *bc* pars fuerit, & alter *d* alterius *ef*, eadem pars: & vicissim, quæ pars est, aut partes primus *a* tertij *d*, eadem pars erit, vel eadem partes & secundus *bc* quarti *ef*.

A

B G C

D

E H F

Divisis *bc* & *ef* in partes *bg*, *gc*, & *eh*, *hf* æquales ipsis *a* & *d*, erit multitudo partium numerorum *bc* & *ef* æqualis. Cumq; æquales inter se *bg*, *gc*, sint minores ipsis *eh*, *hf* inter se æqualibus, quia totus *bc* ponitur minor toto *ef*: erit *bg* ipsius *eh* eadem pars aut partes, quæ *gc* ipsius *hf*. Itaq; uterq; *bg*, *gc* simul, id est, *bc* secundus
 • 5. v. 6. VII utriusq; *eh*, *hf* simul, id est, *ef* quarti eadem pars vel partes erit, quæ *bg* ipsius *eh*, id est, quæ a primi ipsius *d* tertij. Quod erat propositum.

PRO.

PROPOSITIO X.

Theorema 8.

Si numerus *a b* numeri *c* partes fuerit, & alter *d e* alterius *f* eadem partes: & vicissim, quæ partes est primus *ab*, tertij *e*, aut pars; eadem partes erit & secundus *c*, quartif; aut pars.

A .. G .. B

C

D H E

F

Divisis *ab* & *d e* in partes *ag*, *gb* & *d h*, *he* numerorum *c* & *f*: erit multitudo partium *ab* & *d e* aequalis & tam *ag* quam *gb* eadem pars numeri, *c*, quæ tam *dh* quam *he* numeri *f*. Itaq; vicissim eadem pars vel partes, erit *ag* ipsius *dh* & *gb* ipsius *he*, quæ c ipsius *f* est: ac propterea eadem ^{α 9. VII.} pars vel partes erit *ag* ipsius *d h*, quæ *gb* ipsius *he*, ^{β 5. v. 6. VII} & adeoq; uterq; *ag*, *gb* simul, utriusq; *dh*, *he* simul eadem pars vel partes erit, quæ *ag* ipsius *dh*, id est, quæ c ipsius *f*. Quod erat demonstrandum.

PROPOS: XI.

Theorema 9.

Si fuerit ut totus *a b* ad totum *c d*
ita

ita ablatus ae ad ablatum cf : Et reliquus eb ad reliquum fd erit, ut totus ab ad totum cd .

A.....E.....B

C.....F...D

20. def.
VII.

Quia enim proportionales sunt ab ad cd ut ae ad cf , ae erit primus ab secundi cd , ut tertius ae quarti cf , vel aequè multiplex vel eadem pars, aut partes, vel continet equaliter cū aliqua parte vel partibus. Cum ergo cf eadem pars sit ae , quae cd ipsius ab , igitur & reliquus fd reliqui eb eadem pars erit, quae totus cd totius ab . Erit q̄ ut totus ab , ad totum cd ; ita reliquus eb ad reliquum fd .

7.v.8.VII

PROPOSITIO XII.

Theorema 10.

Si sint quotcunque numeri proportionales ut a ad b , ita c ad d & e ad f , erit quemadmodum unus a antecedentium, ad unum consequentium b ; ita omnes antecedentes a & c ad omnes consequentes b & d & f .

Quia

A C . . . E . . .

B D F

Quia enim a vel multiplex est vel eadem pars vel partes a ipsius b quæ c ipsius d & e ipsius f ; β erit & ac simul utriusq; bd simul æquè multiplex, eadem pars vel partes, quæ a ipsius b vel c , ipsius f . Sic & ac tanquam unus & c simul, amborum bd tanquam unius & f simul æquè multiplices erunt vel eadem pars aut partes, quæ a ipsius b . Itaq; & omnium $a c e$ simul eadem est proportio ad omnes c, d, f simul, quæ a ad b . Quod erat propositum.

20. def.
VII.
5. v. 6. VII

PROPOSITIO XIII.

Theorema II.

Si quatuor numeri proportionales sint; ut a ad b , ita c ad d , & vicissim proportionales erunt, ut a ad b , ita b ad d .

A C

B D

Propter eandem proportionem a ipsius b & c ipsius d eadem pars aut partes vel æquè multiplex a est. β Itaq; vicissim a ipsius c & b ipsius d vel

20. def. VI
9. v. 10
VII.

d vel eadem pars aut partes vel æquæ multiplex erit, & atq; idè ut a ad c in b ad d. Quod erat propositum.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 12.

Si sint quotcunque numeri abc , & alij def illis æquales multitudine, qui bini sumantur & in eadem ratione ut a ad b, ita d ad e & ut b ad c, ita e ad f: etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt ut a ad c ita d ad f.

A	D
B	E
C	F

Quia enim est, ut a ad b, ita d ad e; etiam & 13. VII. vicissim erit ut a ad d, ita b ad e, & ob β rationem eandem b ad c, ut c ad f. Itaq; ut a ad d, ita c ad f, & vicissim ut a ad c, ita d ad f. Quod erat propositum.

PROPOSITIO XV.

Theorema 13.

Si

Si unicam a numerum bc quem-
piam metiatur, æquè autem alter d
numerus alterum ef quendam nu-
merum metiatur: & vicissim æquè
unitas a , tertium numerum d metie-
tur, & secundus bc quartum ef .

$A.$	$D.$
$B. G. H. C$	$E. I. K. F$

Diviso bc in unitates bg, gh, hc , & ef in
partes ei, ik, hf , ipsi d æquales; æqualis sit multi-
tudo unitatum numeri bc , multitudini partium
numeri ef , & a unitas æque metitur numerum d , α 5. VII. α
ac bg ipsum ei ; gh , ipsum ik & hc ipsum kf .
Ideoque unitas a α erit eadem pars numeri d ,
quæ totus bc , totius ef ; ac proinde a numerum d
& bc numerum ef æquè metitur. Quod erat
ostendendum.

PROPOSITIO XVI.

Theorema 14.

Si duo numeri a , & b sese mu-
tuò multiplicantes fecerint d & c ali-
quos; geniti d & c ex ipsis æquales in-
ter se erunt.

N 2 $Sunt$

E.

A

B

C D

Sumta unitate e , cum a multiplicans b faciat c , & erit c ex b toties compositus, quot in a sunt unitates, & unitas e numerum a , & b numerum c ²¹⁵ def. VII. aequè metitur; Ergo & vicissim unitas e numerum b , & a numerum c aequè metitur. Rursus quia b multiplicans a facit d , & erit d ex a toties compositus, quot in b sunt unitates, & c aequè metietur b ac a ipsum d . Ideoq; & vicissim c numerum a , & b numerum d aequè metitur. a igitur metitur aequè & d & c , qui proinde sunt inter se aequales. Quod erat propositum.

PROPOS: XVII.

Theorema 15.

Si numerus a duos numeros b & c multiplicans fecerit aliquos d & e ; geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, ut b ad c , ita d ad e quam multiplicati.

Ass.

F.

A

B . . C

D E

Assumpta unitate f, erit d ex b compositus toties, quoties unitas f est in a: similiterq, toties e compositus ex c, quoties unitas eadem est in eadem a. Itaq, b ipsum d & c ipsum e aequè metitur.

Quare b ipsius d & c ipsius e eadem pars est, & α 10. def. VII. β 13. VII.
fit, ut b ad d, ita c ad e, & β permutando, ut b ad c, ita d ad e. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XIIX.

Theorema 16.

Si duo numeria a & b quempiam numerum c multiplicantes, fecerint aliquis d & e: Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, ut a ad b, ita d ad e, quam multiplicantes.

A B

C

D E

Cum enim ex a in c fiat d, idem α fiat ex α 16. VII.

N 3

c in

β 17. VII. c in a . Eodem modo cum ex b in c fiat e , idem α fiat
ex c in b . Quoniam igitur idem c multiplicans i-
psos a & b facit d & e , β erit ut a ad b ita d ad e .

PROPOS: XIX.

Theorema 17.

Si quatuor a, b, c, d numeri pro-
portionales fuerint ut a ad b , ita c ad
 d , qui ex primo a & quarto d fit nu-
merus e , α qualis erit ei, qui ex secun-
do b & tertio c fit numero f . Et si
qui ex primo a & quarto fit, numerus
 e α qualis fuerit ei, qui ex secundo b
& tertio c fit numero f ; ipsi 4 nume-
ri proportionales erunt ut a ad b , ita
 c ad d .

A...

B..

C.....

D....

E.....

F.....

G.....

α . 17. VII. Fiat g ex a in c . Quia idem a multiplicans
 d & c fecit e & g , α erit c ad d , ut g ad e . Erat au-
tem

tem a ad b , ut c ad d : Est igitur $\&$ a ad b ut g ad e . Rursus, quia a & b multiplicantes idem c faciunt f & g , β erit ut a ad b , ita g ad f . Erat β 18. VII.
etiam g ad e , ut a ad b . Ergo e & f sunt γ α -
quales. γ 9. V.

Sint jam *equales* e & f , Erunt $\&$ illi numeri proportionales. Quia enim a multiplicans c & d facit g & e α erit, ut c ad d , ita g ad e vel f ipsi *equalem*.. Rursus cum a & b multiplicantes c faciant g & f , β erit a ad b , ut g ad f . Quare ad eandem proportionem g & f eadem a & b ; c & d erunt eadem. Quod erat ostendendum.

PROPOS: XX.

Theorema 18.

Si tres numeri a, b, c , proportionales fuerint, ut a ad b , ita b ad c , qui sub extremis a & c continetur; *æqualis* est ei, qui à medio b efficitur: Et si qui sub extremis a & c , continetur *æqualis* fuerit ei, qui à medio b describitur; ipsi tres numeri proportionales erunt *aut* ad b , ita b ad c .

N $\&$ Sumta

A + + + + + + + +

B + + + + + D + + + + +

C + + + +

Sumto d æquali b, erit ut b ad c, hoc est, ut
 a ad b; ita d ad c, & erit q₃ numerus ex a in c æ-
 19. VII. qualis numero ex b in d, hoc est ex b in seipsum.

Sit jam etiam productus ex b in seipsum æ-
 qualis producto ex a in c, erunt tres numeri pro-
 portionales. Rursum enim assumpto d æquali ipsi b
 erit ut b ad c ita d ad c. Quia ergo numerus
 factus ex a primo in c quantum æqualis est facto
 ex b secundo in d tertium, & erunt 4 numeri a b d c
 proportionales. Sed b est idem cum d. Quod
 erat propositum.

PROPOSITIO XXI.

Theorema 19.

Minimi numeri *ab*, *cd* omnium
e & *f* eandem cum eis rationem ha-
 bentium, ut *a* b ad *cd*, ita *c* ad *f*, meti-
 untur æquè numeros, eandem cum
 eis rationem habentes, major *ab*,
 quidem majorem *e*, minor verò *cd*
 minorem *f*.

Cum

A...G...B

C...H...D

E.....

F.....

Cum enim sit a b ad c d , ut e ad f , etiam a vicissim est a b ad e , ut c d ad f ; & cum a b , c d sint minores ipsis e & f , β erit a b ipsius e , & c d ipsius f eadem pars vel partes. Sed partes esse non possunt. Divisis enim a b & c d , si fieri poterit in partes ag , gb & ch , hd quæ multitudine erunt æquales, atq; idè ag ipsius e , & ch ipsius f eadem pars. β Erit ergò, ut ag ad e ; ita ch ad f , & vicissim ut ag ad ch , ita e ad f , vel a b ad c d : ac proinde numeri ag , ch , minores quàm ab , cd eandem quàm ab , cd minimi illius proportionis, habebunt rationem. Quod absurdum.

PROPOSITIO XXII.

Theorema 20.

Si fuerint tres numeri, a , b , c & alij ipsis multitudine æquales, d e f , qui bini sumantur, & in eadem ratione; fuerit autem perturbata eorum proportio; ut a ad b , ita e ad f , & ut b

N s ad c

*adc, ita d ad e; Etiam ex æqualitate
in eadem ratione erunt ut a ad c, ita
d ad f.*

A.....	D...
B...	E.....
C.....	F..

α 19. VII.

*Cum enim sit, ut a ad b ita e ad f, α erit nu-
merus ex a in f genitus æqualis numero ex b in e:
Ita ex b in e factus æqualis erit ex c in d procre-
atus, cum sit, ut b ad c, ita d ad e; adeoq, numerus
ex a primo in f quartum productus numero ex c
secundo in d tertium genito æqualis erit. α Quare
ut a ad c ita d ad f. Quod ostendendum erat.*

PROPOS: XXIII.

Theorema 21.

*Primi inter se numeri a & b mi-
nimi sunt omnium eandem cum eis
rationem habentium.*

A.....	B....
C-----	D---
E---	

*Sin minus, sint c, d in eadem proportionem
ipsis*

ipsis a, b minores minimi. α Metietur ergò c i-
 psam a, & d ipsam b aequè; c videlicet ipsum a per
 tot unitates per quot d metietur ipsum b. Quæ uni-
 tates sint in e. Cum ergò c & d metiantur a & β 15. VII.
 b per e unitates, β metietur c ipsos a & b per uni-
 tates ipsorum c & d. Idem enim e per c, quod c
 per e efficit. Itaq; a & b contra hypotbesin non
 erunt primi, sed compositi.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema 22.

Minimi a b numeri omnium c-
 andem cum eis rationem habentiū,
 primi inter se sunt.

A + + + + + B + + + + +

C - - - -

D - - - - E - - -

Sin minus, esto communis ipsorum mensura
 c. Itaq; quoties e est in a & b tot erunt unitates
 in d & e, & c α multiplicans d & e producit a & α 9. 2x.
 b. Proinde est a ad b ut d ad e, Adeoq; cum d & β 18. VII.
 e partes ipsorum a & b minores sint, a & b non
 sunt minimi in eadem ratione. Quod est contra
 hypotbesin,

PRO-

PROPOSITIO XXV.

Theorema 23.

Si duo numeri a b primi inter se fuerint; qui unum a eorum metitur numerus c , ad reliquum b primus erit.

A..... B.....

C.... D----

a 11.2X.

*Sin minus, esto communis eorum mensura d
Quia ergo d metitur c , & ipsum a , etiam d a me-
titur a . Cumq; idem d metiatur etiam b . Non igitur
 a & b erunt inter se primi contra hypo-
thesin.*

PROPOS: XXVI.

Theorema 24.

Si duo numeri a b ad quempiam c primi fuerint; etiam ex illis genitus d ad eundem c primus erit.

A.....B...

C.....

D.....

E----F----

*Sin minus esto communis ipsorum mensura c ,
quæ*

quæ d metiatur toties, quot in f sunt unitates.
 Itaq; e multiplicans f æ producit d. Sic d est fa-
 ctus ex a in b. Ergo cum ex e primo in f quar-
 tum fiat idem numerus d, qui ex a secundo in b β 19. VII.
 tertiã, ß erit ut e ad a, ita b ad f. Cumq; a & c
 sint primi, & e ponatur metiri ipsum c, verit e ad γ 25. VII.
 a primus; adeoq; c & a tanquam primi in sua pro- δ 23. VII.
 portione ð erant minimi. Proinde æquẽ metiẽ- ϵ 21. VII.
 tur b & f eandẽ proportionem habentes, e ipsum
 b & a ipsum f; Et e metiens b & c faciet illos cõ-
 tra hypothesin compositos.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema 25.

Si duo numeri a & b primi inter
 se fuerint: Etiam ex uno a eorum ge-
 nitus c ad reliquum b primus erit.

A B

C

D

Sumto d ipsi a æquali, erit d ad b primus.
 Quia ergo a & d ad b sunt primi, æ erit c geni- α 20. VII.
 tus ex a in d, id est, ex a in seipsum ad eundẽ b
 primus. Similiter ex b in se genitus ostenditur
 primus ad a.

PRO-

PROPOSITIO XXIX.

Theorema 26.

Si duo numeri a & b ad duos numeros c & d , uterque ad utrumque primi fuerint, qui ex eis e & f gignentur, primi inter se erunt.

A..... B...

E.....

C.....D..

F.....

a 26. VII.

Ex a in b fiat e & ex c in d fiat f , erunt e & f , inter se primi. Cum enim uterq; a & b ad c sit primus, genitus ex ipsis ad eundem c primus erit; & ita etiam c ad d primus erit. Quia ergo uterq; c & d ad e est primus, etiam f ex ipsis genitus ad e primus erit.

PROPOS: XXIX.

Theorema 27.

Si duo a & b numeri primi inter se fuerint, & multiplicans uterque se ipsum fecerit aliquem; & geniti ex ipsis

ipsis *c* & *d* primi inter se erunt. Et si,
qui in principio *a* & *b* genitos *c* & *d*
ipso multiplicantes, fecerint aliquos
e & *f*; & hi quoque primi inter se e-
runt: & semper circa extremos hoc
eveniet.

A +++	B ++
C ++++++	D +++
E ++++++	F +++++
G 81	H 16
I 243	K 32

Cum enim *a*, *b* sint inter se primi, *a* erit *c* ex
a in se factus ad reliquum *b* primus: Sic etiam *d*
factus ex *b* in se erit ad *c* primus quia *b* & *c* sunt
inter se primi. adeoque duo facti *c* & *d* inter se primi.
Rursus, quia *b* & *a* inter se sunt primi, erit & *c* ex *a* in se factus, ad *b*, & *d* genitus ex *b* in se ad *a* pri-
mus: Est autem & *c* ad *d* primus. Uterque igitur
ac ad utrumque, *bd* primus & erit, & *c* factus
ex *a* in *c* primus ad factum ex *b* in *d*. Ita si ex *a* in *c* fiat *g*, & ex *b* in *d* fiat *h*, & erant *g* & *h*
primi. Item si ex *a* in *g* & ex *b* in *h* fiant *i* &
k, erant & ipsi primi; idemque circa extremos sem-
per eveniet.

PRO.

EVCLIDIS ELEM:
PROPOS: XXX.

Theorema, 28.

Si duo numeri ab, bc primi inter se fuerint: Etiam uterque simul ac ad quemlibet illorum ab vel bc primus erit: & si uterque simul ac ad unum aliquem illorum ab primus fuerit; etiam qui in principio, ab & bc , numeri primi inter se erunt.

A.....B.....C

D----

$\alpha 12. ax.$ Si ac ad bc non est primus, metiatur eos communis mensura d . Quia ergo d metitur ac totum & ab ablatum, etiam a metitur reliquum bc . Ideoq; ab, bc contra hypothesein non sunt primi. Similiter si ac sit primus ad ab , dico etiam ab, bc esse primos inter se. Sin minus mensur communis d metiens ab & bc , etiam ac ex ipsis compositum $\beta 10. ax.$ metietur. Ideoq; contra hypothesein $a c$ ab primi non erunt.

Hinc patet Corollarium: Si numerus metitur duos numeros, metitur etiam ex illis compositum.

Vc

Ut quia d metitur ab & b c etiam metitur ex illis compositum ac.

PROPOSITIO XXXI.

Theorema 29.

Omnis primus numerus *a* ad omnem numerum *b*, quem non metitur, primus est.

A E
C . . .

Sin minus, esto communis mensur c. c ergo metiens a & b non potest esse idem cum a, qui non metitur b. Proinde cum alius numerus c metiatur ipsum a, non potest esse primus contra hypothesis,

PROPOS: XXXII.

Theorema 30.

Si duo numeri *a* & *b* sese mutuo multiplicantes fecerint aliquem *c*: genitum *c* autem ex ipsis metiatur aliquis primus numerus *d*: is etiam unum eorum, *a* vel *b*, qui in principio metietur.

o

sed

A... B.....

C.....

D... E.....

Si d non metiatur a, erunt d & a primi.
 Sint autem in e tot unitates, quoties d continetur
 in c. Itaq; d multiplicans e producit c ut & a
 multiplicans b, & est ut d ad a, ita b ad e. Cumq;
 d ad a sit primus, ut supra patet, & erunt d & a in
 sua proportionem minimi, & aequè y metientur
 ipsos b & e. Proinde si d non metitur ipsum a, me-
 titur ipsum b. Idem inferretur de a si d non me-
 titur b.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema 31.

Omnem compositum nume-
 rum a aliquis numerus metitur.

D.....

B..... C...

211. ax.

Si b metiens a esset primus, pateret pro-
 positum. Sed cum sit compositus, metitur ipsum c,
 qui vel primus, vel compositus est. Si primus, ipse
 metiens d a metitur etiam a. Si compositus, a-
 lius ipsum metiens esset primus. Quia oportet
 tan-

*tandem venire ad numerum primum nisi infinite
diminui numeros posse statuerimus.*

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema 22.

Omnis a numerus aut primus est,
aut cum aliquis primus metitur.

A ++++++

*Cum enim omnis numerus sit vel primus ; a
vel compositus : compositum autem omnem metia-
tur primus. Igitur omnis numerus primus est, a 33. VII.
aut eum primus metitur.*

PROPOS: XXXV.

Problema 3.

Numeris datis quocunque
 a, b, c reperire minimos omnium, e-
andem rationem habentium cum
ipsis sive sit a ad b , ut b ad c , sive non.

A..... B..... C.....

D..

E... F.. G....

H---- I---- K----

L-----

Q 2

Si 61

α 21. VIII.
 β 3. VII.
 γ 1.5 VII.

Si a, b, c essent primi, α pateret propositum.
 Si non primi, β inveniatur mensur eorum maximus
 d , qui ipsos a, b, c metiatur per e, f, g , quos in ea-
 dem ratione minimos dico. Cum enim e, f, g
 multiplicantes eundem d producant a, b, c , eos in
 eadem ratione esse oportet. Si autem e, f, g ne-
 gentur minimi, ipsis minores in eadem ratione sint
 h, i, k , qui ipsos a, b, c α aequè metientur per l , &
 vicissim ipsos a, b, c per h, i, k . Ideoq; l multi-
 plicans h, i, k producit abc & l metitur abc per
 hik . Cum ergò eundem a producant e primus
 multiplicans d , quartum & h secundus multi-
 plicans l tertium, δ erit ut e primus, ad h secun-
 dum; ita l tertius, ad d quartum. Sed e major
 est quàm h , igitur & l major est quàm d : adeoq;
 l metiente ipsos a, b, c , non erit d communis ma-
 xima mensura contra hypothesein.

δ 19. VII.

Hinc patet maximam mensuram quotlibet
 numerorum metiri ipsos per numeros in eadem pro-
 portione minimos.

PROPOSITIO XXXVI.

Problema 4.

Duobus numeris a & b datis, re-
 perire, quem illi minimum metian-
 tur, numerum c .

Si a

A B

C

D

E - - - - F - - - -

Si a & b dati sunt primi, ex ipsorum inter se multiplicatione factus c est minimus omnium, quæ a & b metiuntur. Cum enim c factus sit ex a in b, patet, quod a ipsum c per b, & b ipsum c per a æ metiuntur. Si quis autem c neget etiam ^{æ 7. ax.} minimum, metiantur a & b alium d minorem ipso c, per e & f. Cum ergo idem d fiat ex a pri- ^{ε 19. VII.} mo in e quartū, & ex b secundo in f tertium, & e γ ^{23. VII.} rit ut a ad b, ita f ad e; adeoque a & b tanquam γ ^{21. VII.} primi k in sua proportione minimi æquē d metien- ^{ε 17. VII.} tur ipsos f & e. Quoniam verò & multiplicans b & e facit c & d, erit c ad d, ut b ad e: ac propterea cum b metiatur ipsum e, metietur & c ipsum d, major minorem. Quod absurdum.

A + + + + B + + + + +

C + + D + + +

E + + + + + + + + + +

F - - - - - - - - - -

G - - - - H + - - - -

Deinde dati numeri a & b non sint primi: ^{ε 35. VII.}
 & inveniantur c, d in eadem proportione mini-
 o 3 mi,

mi. & erunt 4 numeri proportionales, ex quorum primo a & quarto d fiet idem e qui ex b secundo in c tertium; eritq; factus e minimus quem a & b metiuntur. Cum enim c ex a in d , & ex b in c sit factus, utrumq; a & b ipsum e metiri constat. Si quis minimum eum esse negaverit, esto f minor ipso e , quem metiantur a & b per g & h . Cum ergo idem f fiat ex a primo in g quartum, & b secundo in h tertium, p erit ut a ad b ita h ad g , adeoq; c & d minimi in proportionem a ad b , vel h ad g , d metientur ipsos h & g aequè. Quoniam verò a multiplicans d & g facit e & f , erit e ad f , ut d ad g ; ac propterea cum d ipsum g metiatur, metietur & e ipsum f , major minorem. Quod absurdum.

Hinc patet Corollarium. Si duo numeri a & b multiplicent minimos c & d eandem rationem habentes, major b minorem c , & minor a majorem d producitur minimus e , quem illi metiuntur.

PROPOS: XXXVII.

Theorem: 33.

Si duo numeri a & b numerum quempiam cd metiantur: Etiam minimi-

nimus e quem illi metiuntur a, b, c-
undem d metietur.

A . . . B . . .
C F D
E

Sin minus, auferatur e ex cd quoties potest,
& relinquatur fd minor ipso e. Cum itaq, tam
a quàm b metiatur ipsum e, & e ipsum c f, a me-
tietur etiam tum a tum b ipsum cf: adeoq, a & b α 11. ax.
metientes & cd totum & cf ablatum, etiam β me. β 12. ax.
tientur reliquum fd. Sed fd est minor, quàm
e. Non igitur e est minimus quem a & b metiun-
tur, contra hypotesin.

PROPOSITIO XXXIIX.

Problema 5.

Tribus numeris abcdatis, reperi-
re, quem illi minimum metiantur,
numerus d.

A . . . B . . . C
D
E

α Invento d minimo, quem a & b metian- α 36. VII.
tur, eundem etiam vel metietur c vel non. Si me-
tiatur, factum est quod jubebatur. Siq, d non sit
minimus, minor ipso fiat e, quem abc metiantur.

Q 4

Quo-

β37.VII.

Quoniam igitur a & b metiuntur e , & d est minimus, quem a & b metiuntur, β metietur quoque d ipsum e major minorem. Quod est absurdum.

A . . B . . . C

D

E

F - - - - -

γ II.VII.

Deinde, si C non metiatur ipsum d , α invento e minimo, quem c & d metiantur, erit e numerus minimus, quem a , b , c metiuntur. Cum enim a & b metiantur ipsum d , & d ipsum e , etiam a & b ipsum e metientur, metitur autem & c eundem e . Ergo omnes a , b , c ipsum e metiuntur.

Si c non esset minimus, minor ipso sit f quem a , b , c metiantur. Quia igitur a & b ipsum f metiuntur, β metietur etiam eundem f numerus d , adeoque cum c & d metiantur ipsum f minorem, quam c , non erit e minimus, quem c & d metiuntur. Quod est contra hypothesin.

Hinc nascitur Corollarium: Si tres a , b , c , numeri numerum quempiam f metiantur, etiam minimum e , quē illi metiuntur, eundem f metiri.

In ultima enim parte demonstrationis ostensum

sum est ex eo, quod a, b, c ponebantur metiri ipsum f ; etiam e minimum, quem a, b, c metiuntur, eundem f metiri.

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema 34.

Si numerum a numerus b quispian metiatur; ille a , quem metitur, partem habebit à dimetiente b denominatam.

A

B C . . .

Quoties b metitur a , tot sint in c unitates. $\alpha 15$. VI.
Quia ergo b ipsum a metitur per unitates ipsius c , $\beta 13$ def. VII
idem c metietur a per unitates b . Itaq, unitas toties metitur b , quoties c ipsum a . Sed unitas β metitur b per partem à b denominatam; Ergo & c metitur a per partem à metiente b denominatam. Quod erat propositum.

PROPOSITIO XL.

Theorema 35.

Si numerus a partem b habuerit
O s quam-

quamlibet; metietur illum a nunc
rus c à parte b denominatus.

A ++++++

B...C....

Cum enim pars b denominetur à c; sit au-
tem & unitas pars ipsius c, ab eodem c denomina-
ta; metietur unitas ipsum c & b ipsum a aequè.
e 15. VII. Vicissim ergò & unitas ipsum b, & c ipsum a
metietur.

PROPOSITIO XLI.

Problema 9.

Numerum g reperire, qui mini-
mus cum sit, habeat partes datas abc.

D.. A secunda

E... B tertia.

F... C quarta

G ++++++

H-----

Numeri à partibus a, b, c denominati sint d,
e 38. VII. e, f, qui minimum suum g a metiantur. Erit hic mi-
n 39. VII. nimus partes datas continens. Partes quidem ha-
bet: Cum enim d, e, f ipsum g metiantur, s habe-
t 40. VII. bit g partes à d, e, f denominatas, hoc est, a, b, c,
quæ à d, e, f denominatur. Si autem minimus non
sit, est h minor habens easdem partes a, b, c. Has
ergò

ergò cum habeat, & metientur ipsum d, e, f numeri, à partibus illis denominati: adeoq; cum h sit minor, non erit g minimus quem d, e, f metientur. contra hypothesein.



EUCLIDIS

ELEMENTO-

RUM

LIBER IIX.

PROPOS: I.

Theorema I.

Si fuerint quotcunque numeri a, b, c, d , deinceps proportionales, extremi verò a & d ipsorum primi inter se fuerint, ipsi minimi sunt omnium, eandem cum eis rationē habent iū.

Sint

A ++++++	C +++++
B ++++++	F ----
C ++++++	G ----
D ++++++	H ----

Sin minus, sint in eadem ratione minores e f g h. Quod ergò ipsis a, b, c, d bini & in eadem ratione sumti sunt alij e, f, g, h multitudine æ-
14. VII. quales, ex æquali æ erit, ut a ad d, ita e ad h. Sed
23. VII. a & d sunt in sua ratione β minimi quia primi.
21. VII. Ergò tam a ipsum e, quàm d ipsum h æquè me-
tietur, major minorem. Quod absurdum.

PROPOS: II.

Problema I.

Numeros *c* & *d* reperire deinceps
 proportionales minimos, quotcun-
 que jusserit quispiam in data ratio-
 ne *a* ad *b*.

					K, 16.
				F, 8.	L, 24.
A, 2.	C, 4.	D, 6.	G, 12.	H, 18.	M, 36.
B, 3.	E, 9.	I, 27.			N, 54.
					O, 81.

Tres

Tres ita inveniuntur. a multiplicans seipsum & b; producit c & d; b in se tertium f. Quia ergo ex a in a & b facti sunt c & d: a ergo est, ut a ad b, ita c ad d. Ita cum d & e sint ex b in a & b, erit, ut a ad b, ita d ad e. Sunt itaque continuè proportionales in ratione a ad b. Sed minimi e iam sunt in ratione eadem. Quia enim extremi c & e facti sunt ex primis a & b in seipsos etiam c, e erunt inter se primi & in eadem ratione minimi. Iam ex a in inventos c, d, e fiant f, g, h & ex b in ultimum e fiat i. Erunt quatuor f, g, h, i in ratione data minimi. Quia enim f, g, h, i ex a in c, d, e sunt facti, retinent eandem rationem; & quia a & b multiplicantes e fecerunt h & i, erunt etiam h i in ratione a ad b. Sunt verò etiam minimi ex modo data ratione. Non aliter ex a in f, g, h, i fiunt k, l, m, n; & ex b in ultimum o, ut sint quinque continuè proportionales in ratione a, b proposita. Et consequenter quotcumque sex, 7, 8 vel 9. &c. continuè proportionales in ratione proposita possunt inveniri. Hinc sequuntur Corollaria.

Corollarium 1.

Si tres minimi numeri sint continuè proportionales, extremi erunt quadrati: Si autem quatuor fuerint, cubi. Quia extremi illi trium fiunt

cx

ex ductu a & b in se: Extremi verò
ipforum quatuor sunt ex ductu radi-
cum a & b in quadratos e & f . Quare
 f & i necessum est esse cubos.

Corollarium 2.

Extremi numeri quotcunque
proportionalium, ex hujus propor-
tionis sensu inventorum in data ra-
tione minorum, inter se sunt pri-
mi. Hoc patet ex multiplicatione,
qua numeri proportionales pro-
ducuntur ex 29. VII.

Corollarium 3.

Duo numeri minimi in data ra-
tione metiuntur omnes medios quot-
cunque minorum in eadem rati-
one. Producuntur enim ex illorum
multiplicatione in alios numeros.

PROPOSITIO III.

Theorema 2.

Si sint quotcunque numeri de-
inceps proportionales a, b, c, d , mini-
mi omnium eandem cum eis ratio-
nem

habentium; illorum extrema, *a, d* sunt inter se primi.

A, 8.

K, 8.

B, 12.

E, 2.

G, 4.

L, 12.

C, 18.

F, 3.

H, 6.

M, 18.

D, 27.

I, 9.

N, 27.

Inventis duobus in data ratione *a ad b* vel *b ad c*, vel *c ad d*, minimis *e, f*, & in eadem ratione *e ad f* = tribus minimis *g, h, i*, & quatuor ejusdem rationis *k, l, m, n*, & ita si opus foret, etiam quinq, vel sex, donec respondeant multi. udine initio propositis numeris *a, b, c, d*. Quoniam ergo & *a, b, c, d*, & *k, l, m, n* sunt minimi in data ratione, oportet ut singuli singulis sunt aequales, *a* ipsi *k* & *d* ipsi *n*. Cumq, *k* & *n* sint inter se primi, etiam *a* & *d* inter se primi erunt. a 2, IIX;
β 1. cor. 2.
IIX.

PROPOS: IV.

Problema 2.

Rationibus datis quotcunque *a ad b, c ad d* in minimis numeris, reperire numeros *f, e, g* deinceps minimos in datis rationibus.

Pro

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.

G, 4. F, 24. E, 20. G, 15.

I ---- K ---- L ----.

Pro tribus α inveniatur e minimus, quem
 36. VII. b secundus & c tertius metiantur: & quoties b
 metitur e, toties a ipsum f, & quoties e eundem e,
 toties d metiatur g. Erunt t, e, g continue pro-
 portionales in rationibus datis. Quia enim a & b
 ipsos f & e aequè metiuntur, per eundem h, etiam
 a & b multiplicantes h producunt f & e; & β
 est, ut a ad b, ita f ad e. Ita cum c & d aequè me-
 18. VII. tiantur ipsos e & g, β erit etiā, ut c ad d, ita e ad
 g; adeoque f, e, g in rationibus a ad b & c ad d sunt
 continue proportionales.

Quod si iidem negentur esse minimi, mino-
 21. VII. res sint i, k, l. Quia ergo a & b sunt minimi,
 in sua ratione, & aequè metientur ipsos i & k, in ea-
 dem ratione constitutos consequens b ipsum k,
 consequentē: Sic etiam c & d ipsos k & l, ante-
 cedens c antecedentem k. Itaque cum b & c me-
 37. VII. tiantur ipsum k, minimus e quem b & c metian-
 tur, eundem k, major minorem d metietur. Quod
 absurdum.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 5. F, 7.

H, 24. G, 20. I, 15. K, 21.

Deinde

Deinde trium rationum datarum a ad b, c ad d, e ad f quatuor minimi, deinceps proportionales inveniuntur. Primo quidem g a minimus, quem b & c metiuntur, & simul h & k ut prius. Quod si e metitur ipsum i, toties etiam f metiatur k, erantq; h, g, i, k minimi in rationibus datis ijsdem fundamentis ut prius.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7.

H, 24. G, 20. I, 15.

M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.

Si e non metiatur i, a invento minimo k, quem e & i metiantur, quoties i ipsum k, g ipsum l & h ipsum m; & quoties e ipsum k, toties f ipsum n metiatur. Erunt m, l, k, n minimi in rationibus datis ex eadem demonstratione.

Deniq; 4 rationum datarum in numeris minimis inveniuntur quinq; directe proportionales, expditis primum, juxta precedentem modum, quae pro quatuor erant faciendae; & deniq; cum ratione quarta s ad t fiat, ut antea cum tertia. Ut in exemplis patet, in quorum priore s metitur n; in posteriore non.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 4. S, 3. T, 2.

M, 48. L, 40. K, 30. N, 105. O, 70.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 9. T, 2.

M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.

R, 144. Q, 120. P, 90. O, 315. V, 70.

P

PRO;

EVCLIDIS ELEM:
PROPOSITIO V.

Theorema. 3.

Planum numeri a & b rationem inter se habent ex lateribus compositam c ad e , & d ad f ; vel ex c ad f , & d ad e .

A, 24. B, 48.

G, 18.

C, 4. D, 6. E, 3. F, 16.

A, 24. B, 48.

G, 96.

C, 4. D, 6. F, 16. F, 3.

Ex multiplicatione d in e fiat g. Cum ergo d multiplicans c & e producat a & g, a erit a ad g, ut c ad e; & g ad b, ut d ad f, quia c in d & fillos producit. Sunt ergo deinceps proportionales a, g, b in laterum c ad e, & d ad f proportionibus. Sed ratio a ad b componitur ex rationibus a ad g, & g ad b, Ergo & ex rationibus laterum c ad e, & d ad f. Eodem modo ostenditur a ad b ratio composita ex rationibus c ad f, & d ad e.

a. 17. VII.

β 27. def.
VII.

PRO-

PROPOSITIO VI.

Theorema 4.

Si sint quotcunque numeri a, b, c, d, e , deinceps proportionales, primus, a autem secundum b non metiatur; neque alius quisquam ullum metietur.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
F, 4. G, 6. H, 9.

Quia enim eadem duorum proximorum sunt rationes, patet, si primus secundum non metiatur, quod nec secundus tertium & hic quartum, & hic quintum possit metiri. Quod verò nec quisquam α^2 . IIX; quemquã reliquorum metiatur, ita patet. Sumtis n, f, g, h minimis in a, a d b ratione erit ex æquo, ut a ad c , ita f ad h . Cumq; sit etiam ut a ad b , ita f ad g , Ergo ~~f ad c~~ & a non metiatur b ; Ergo nec f metiatur g , & proinde non est unitas. Quare cum β I. IIX. f & h β sint primi, f non metitur h , adeoq; nec a ipsum c . Quod ipsum de reliquis etiam demonstratur.

PROPOSITIO VII.

Theorema 5.

Si sint quotcunque numeri a, b, c, d, e
P 2 de-

deinceps proportionales, primus autem a extremum e metiatur; is a etiam metietur secundum b .

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

6.IIX.

Si enim a non metiretur b , neq^a metiretur aliorum quenkumq^a, atq^{ue} ita nec a ipsum e , contra hypothesin.

PROPOSITIO IIX.

Theorema 6.

Si inter duos numeros a, b , medij, c, d continua proportionē ceciderint; quot inter eos medij continua proportionē cadunt numeri: tot & inter alios e, f eandem cum illis habentes rationem medij l, m , continua proportionē cadent.

A, 24. C, 36. D, 54. B, 81.

G, 8. H, 12. I, 18. K, 27.

E, 32. L, 48. M, 72. F, 108.

A, 40.

A, 40. C, 20. D, 10. B, 5.
 G, 8. H, 4. I, 2. K, 1.
 E, 8. L, 4. M, 2. F, 1.

A, 27. C, 9. D, 3. B, 1.
 G, 27. H, 9. I, 3. K, 1.
 E, 108. L, 36. M, 12. F, 4.

*Sumtis enim totidem g, h, i, k in ratione α 2. VII.
 a ad c minimis, ex aquo est, ut a ad b, & c ad f, β 23. VII.
 ita g ad k. Cumq; g & k inter se sint primi tan- γ 21. VII.
 quam extremi minimorum & in sua ratione β mi-
 nimi, & aequè metietur, g ipsum e, & k ipsum f.
 Quoties autē g & k, metiuntur e & f, toties me-
 tiantur h & i alios l & m. Itaq; cum g, h, i, k,
 per eundem numerum metiantur e, l, m, f, erunt
 hi producti ab illo numero δ in g, h, i, k, in eadem
 cum ipsis ratione. Sunt autem g, h, i, k continuè
 proportionales. Ergo & e, l, m, f. Et cum mul- δ 18. VII.
 titudine sint pares numeris a, c, d, b, cadent tot
 medij inter ef, quot inter ab.*

PROPOSITIO IX.

Theorema 7.

Si duo numeri *a, b* sint inter se
 primi, & inter eos medij *c, d*, conti-
 P 3 nua

nua proportione ceciderint numeri;
quot inter eos medij continua pro-
portione cadunt numeri, totidem &
inter utrumque eorum a & b , ac uni-
tatem g , medij e , g , & f continua
proportione cadent.

O, 1.	E, 2.	G, 4.	K, 8.	A, 8.
			L, 12.	C, 12.
	F, 3.	H, 6.	M, 18.	D, 18.
		I, 9.	N, 27.	B, 27.

α 2.IIX.

β 1.IIX.

γ 7.ax.

δ 5.ax.

ϵ 20.def.
VII.

Inventis e, f in ratione a ad c minimis, & su-
mantur in eadem ratione tres g, h, i & quatuor
 k, l, m, n vel plures, dum multitudine aequales fi-
ant initio positis a, c, d, b . Itaq; cum ab sint pri-
mi, & erunt a, c, d, b minimi in ratione e ad f ; sint
verò & k, l, m, n in eadem ratione minimi; erunt
ipsis a, c, d, b aequales, singuli singulis. Caterum
quia e multiplicans se ipsum producit g ; multipli-
cans verò ipsum g facit k ; & metietur e ipsum g per
 e , & g ipsum k per eundem e . δ Metitur verò & o
ipsum e per e . Aequè igitur metitur o ipsum e , &
 e ipsum g , & g ipsum k : Ideoq; eadem pars erit o
ipsius e , & e ipsius g , & g ipsius k ; adeoq; & propor-
tionales deinceps o, e, g, k ; Perinde ut & o, f, i, n .
Cumq; & o, e, g, k , & o, f, i, n sint multitudine æ-
qua-

quales ipsis k, l, m, n vel a, b, c, d cadent tot medij
 continuè proportionales inter o, k vel o, a , ac inter
 o, n vel b, o , quot inter a, b .

PROPOSITIO X.

Theorema 8.

Si inter duos numeros a, b & uni-
 tatem p continuè proportionales ce-
 ciderint numeri c, d, e ; quot inter u-
 trumque ipsorum a vel b , & unitatem
 p deinceps medij continua propor-
 tione cadunt numeri, totidem & in-
 ter ipsos a & b medij, m, n, o continua
 proportione cadent,

P	1	F	6	G	36	H	216	B	1296
C	3	I	18	L	108	O	648	N	324
D	9	K	54	M	162	A	81	E	27

α Completis spacijs intermedijs i, k & h, m ,
 n & o , ut i fiat ex c in f ; k lex c in i, g, m, n, o
 ex c in k, l, h . Cum ergò sit ut p ad c , ita c ad d ,
 & d ad e , & c ad a , β æquè p metietur ipsum α 2.IIX.

P 4

c &

c , & c ipsum d , & sic deinceps. Sed p metitur
 c per c : Ergo & c ipsum d , & d ipsum e & e ipsum
 a per c metietur. Quare c multiplicans seipsum
 fecit d , multiplicans d fecit e , & multiplicans e fe-
 cit a . Idemq; de f, g, h, b est statuendum. Pro-
 inde, cum c multiplicans c & f , faciat d & i , erit
 ut c ad f , ita d ad i ; itemq; ut c ad f , ita i ad g .
 Sunt ergo dig continuè proportionales in ratione,
 c ad f . Rursus & e, k, l, h sunt continuè proporti-
 onales: quia enim c in d, i, g fecit e, k, l , ejusdem d
 erunt e, k, l rationis cujus dig, id est, c ad f ; itemq;
 & c & f in g fecerint l & h ; erit, ut c ad f , ita l
 ad h . Eodemq; modo continuè proportionales osten-
 duntur a, m, n, o, b in ratione c ad f , quia ex c in
 e, k, l, h sunt a, m, n, o , & ex c & f in h , sunt o &
 b . Tot itaq; medij proportionales inter a & b ca-
 dent, quot inter a vel b & unitatem c , quia mul-
 titudine conveniunt.

PROPOS: XI.

Theorema 9.

Duorum quadratorum nume-
 rorum a & b , unus e medius propor-
 tionalis est numerus; & Quadratus a
 ad Quadratum b duplicatam habet
 lateris c ad latus d rationem

Sic

A, 9. E, 21. B, 49.

C, 3. D, 7.

Ex c in d fiat e: & erit, ut c ad d, ita a ad e & e ad b, adeoque tres continuè proportionales in ratione c ad d; cadiq; inter a & b medius proportionalis e. Cum vero a ad b habeat rationem, α 1.7. VII β 16. def. VII. duplicatam ejus, quam a ad e, habet quoque duplicatam a quadratus ad b quadratum ejus, quam c latus, ad d latus, quod eadem hic sit ratio, quæ ibi.

PROPOS: XII.

Theorema 10.

Duorum cuborum numerorum a & b , duo medij proportionales sunt numeri, h, i . & cubus a ad cubum b triplicatam lateris c ad latus d habet rationem.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.

E, 9. G, 12. F, 16.

C, 3. D, 4.

Compleantur spacia e, g, f, & h, i, ut in 10. hujus fiebat. Et erunt e, g, f tres continuè proportionales in ratione c ad d, ut & a, h, i, b, α 17. VII

P S

qua-

26. def.
VII.

quatuor; cadentq³ inter cubos a, b duo medij; Cum
verò primus a ad quartum b habeat rationem tri-
plicatam ejus quam primus a ad h secundum; ha-
bebit etiam à cubus, ad b cubum rationem triplica-
tam, laterum c ad d , cum a ad h sit, ut c ad d .

PROPOSITIO XIII.

Theorema II.

Si sint quotlibet numeri a, b, c de-
inceps proportionales, & multipli-
cans quisque seipsum, faciat aliquos
 d, e, f ; qui ab illis producti fuerint,
proportionales erunt: Et si numeri,
 a, b, c , primùm positi multiplicantes
jam factos d, e, f , fecerint aliquos g, h, i
ipsi quoque proportionales erunt: Et
semper circa extremos hoc eve-
niet.

$$\begin{array}{r}
 \hline
 |A, 2. | B, 4. | C, 8. | \\
 \hline
 |D, 4. | N, 8. | E, 16. | O, 32. | F, 64. | \\
 \hline
 |G, 8. | P, 16. | Q, 32. | H, 64. | K, 128. | S, 256 | I, 512. | \\
 \hline
 X, 16 | T, 32 | V, 64 | L, 128 | U, 256 | Z, 512 | 2048 | M, 4096 \\
 \hline
 \end{array}$$

Ex

Ex a in b fiat n, & o ex b in c: Fiant item p, q ex a in n, e; & r, s, ex b in o, f: Item t, u, x, ex a in p, q, h; & y, z, a ex b in r, s, i. Cum ergo a multiplicans seipsum & b fecerit a & n; a Erit, ut a ad b, ita d ad n: Ita, cum n & e sint ex b in se & a; Erit etiam, ut a ad b, ita n ad e; & ita d, n, e continuè proportionales sunt in ratione a ad b. Proportionales etiam sunt continuè e, o, f, quia ex b in se & in c fieret e & o; ex c in se & in b sunt o & f, a eadem rationis cum b, c, id est, cum a, b. Quoniam ergo d, n, e & e, o, f sunt in eadem ratione continuè proportionales, ex aquo erit, ut d ad e; ita e ad f; & ita d, e, f continuè proportionales erunt. Deinde in eadem ratione continuè proportionales sunt g, p, q, h, cum g, p, q fiant ex a in d, n, e, & ex a, b in e fiant q & h: Similiter & h, r, s, i, cum h, r, s fiant ex b in e, o, f, & s, i ex b, c in f. Est ergo ex aquo ut g ad h, ita h ad i.

a 17. VII.

Eodemq, modo k, l, m continuè demonstrantur proportionales.

PROPOS: XIV.

Theorema, 12.

Si Quadratus numerus a Qua-
dra-

dratum numerum b metiatur: & latus c unius a metietur latus d , alterius b . Et, si unius Quadrati a latus c metiatur latus d alterius b ; & Quadratus a Quadratum b metietur.

A, 4. E, 12. B, 36.

C, 2. D, 6.

α 11. IIX.

β 7. IIX.

Fiat e ex e in d , α Erunt a , e , b continuè proportionales in ratione c ad d . Cumq; a primus b tertium metiatur, β metietur etiam e medium. Ideoq; cum sit, ut a ad e , ita c ad d , β metietur etiam latus c latus d . Rursus, si latus c metiatur latus d , β metietur etiam quadratus a quadratum b , cum in eadem ratione continuè α proportionalibus existentibus a , e , b ; a ipsum e aequè β metiatur, atq; c ipsum d , & ita etiam a quadratus b quadratum.

PROPOSITIO XV.

Theorema 13.

Si cubus numerus a , eubum numerum b metiatur; & latus c unius a metietur latus d alterius b . Et si latus c unius a cubilatus d alterius b meti-

metiatur; & cubus a cubum b metietur.

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216.

E, 4. G, 12. F, 36.

C, 2. D, 6.

Completis iterum spacijs $e, g, f, \& h, i$ ut in α 12. IIX.
 10, hujus factum est. α Erunt $\& e, g, f \& a, h, i, \beta$ 7. IIX.
 b continuè proportionales. Cumq; a primus metiatur extremum b, β metietur etiam secundum $h \&$ propter eandem rationem latus c quoq; d latus metietur. Rursus si c latus metiatur latus d , metietur etiam cubus a cubum b . Continuè enim existentibus proportionalibus a, h, i, b in ratione c ad d , æquè metietur c ipsum d , $\& a$ ipsum h , $\&$ sic etiam extremum b , cubus cubum.

PROPOS: XVI.

Theorema 14.

Si Quadratus numerus a Quadratum numerum b non metiatur; neque latus c unius a metietur alterius b latus d . Et si latus c unius a quadrati non metiatur latus d alterius

us b : neque quadratus a quadratum b metietur.

A, 16. B, 81.

C, 4. D, 9.

14. IIX.

Si Clatus metiretur latus d , etiam a quadratus c , \propto metiretur quadratum b contra hypothesin. Et contra, si quadratus a , quadratum b metiretur, etiam clatus d itidem contra hypothesin.

PROPOS: XVII.

Sicubus numerus a cubum numerum b non metiatur: neq; latus c unius a latus d alterius b metietur. Et si latus e cubi unius a latus d alterius b non metiatur: neq; cubus a cubum b metietur.

A, 8. B, 27.

C, 2. D, 3.

15. IIX.

Si enim latus c , metiretur latus d , etiam \propto metiretur a cubus b contra hypothesin. Et contra, si cubus a cubum b metiretur; etiam latus c latus d metiretur, itidem contra hypothesin.

PROPOS: XIX.

Theorema 16.

Duorum similium planorū numerorum a & b unusquē medius proportionalis est numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homom.

mologi c vel d ad latus homologum e
vel fractionem.

A, 12. G, 18. B, 27.

C, 6. D, 2. E, 9. F, 3.

Fiat g ex d in e. Cum sit ut c ad d, ita e ad f;
erit permutando c ad e, ut d ad f. Cum ergo d mul-
tiplicans c & e producat a & g, a erit a ad g, ut c
ad e. Sic etiam erit g ad b, ut d ad f, quia e multi-
plicans d & f producit g, & b. Itaq; a, g, b sunt
proportionales in rationibus c ad e & d ad f, adeoq;
inter a & b cadit g medius proportionalis. Et quia
proportionales sunt a, g, b, habebit a ad b rationē
duplicatam ejus, quam a ad g, i. e. c ad e vel d ad
f. Itaq; planus a ad planum b duplicatam habet
rationem laterum homologorum.

PROPOS: XIX.

Theorema 17.

Duorum similibus solidorum nume-
rorum a, b duo m, n medij proportionales
sunt numeri: Et solidus a ad solidum b tri-
plicitam habet rationem lateris homologi
c vel d vel e ad latus homologum f vel g, vel h.

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.

I, 6. L, 12. K, 24.

C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.

Fiat i ex c in d, & k ex f in g, & l ex d in f. &
m, n ex e, h in l. Cum ipsis f, g, h proportiona-
les sint c, d, e, etiam permutando proportionales
erunt, ut c ad f, ita d ad g & e ad h. Et quia
d multiplicans c & f producit i & l, a erit, ut c
ad f

ad f, ita i ad l: & ut d ad g, ita l ad k; quia l & k sunt ex f in d, g; adeoq; i, l, k sunt continuè proportionales in ratione c ad f, vel d ad g. Quia verò a solidus factus est ex c, d, e lateribus, & i ex c in d, fit, ut e multiplicans i faciat a. Ita cum b solidus sit factus ex f, g, h lateribus, k verò ex f in g, fit ut b solidum faciat, h multiplicans k. Quare cum e multiplicans i, l fecerit a, m; erit a ad m ut i ad l, id est, ut c ad f, vel d ad g, vel e ad h; Sic etiam n ad b, ut l ad k, id est, ut c ad f; cum h multiplicans l, k, fecerit n, b. Est autem & m ad n, ut e ad h, quod e, h multiplicantes l fecerint m, n. Sunt ergo a, m, n, b continuè proportionales in ratione c ad f; adeoq; inter a b similes solidos cadunt medij proportionales m, n. Et quia a, m, n, b sunt 4. continuè proportionales & habebit solidus a ad solidum b similem rationem ejus, quam a ad m, id est, c ad f, d ad g, & e ad h, id est, triplicatam ex ratione c ad f laterum homologorum.

p 18. VII.

v 26. def.
VII.

PROPOSITIO XX.

Theorema 18.

Si inter duos a, b numeros unus medius proportionalis cadat numerus c; similes plani erunt illi numeri a & b.

A, 18.

A, 18. C, 24. B, 32.

D, 3. E, 4. F, 6. G, 8.

Sunt minimi d, e in ratione a, c & metiuntur æquè ipsos a, c per f , & ipsos c, b per g . Itaq; f multiplicans d, e & producit a, c , & g eosdem d, e multiplicans producit c, b . Itaq; cum c multiplicans f, g faciat c, b , & erit, ut c ad b , id est, ut d ad e , ita f ad g ; & permutando, ut d ad f , ita e ad g . Cum verò a fiat ex d in f , erit planus, cujus latera d & f , sunt proportionalia lateribus e & g , ex quibus fit b planus. Erunt itaq; a, b plani similes.

æ 21. VII.

ß 9. ax.

γ 17. VII.

PROPOSITIO XXI.

Theorema 19.

Si inter duos numeros a, b duo medij proportionales cadant numeri c, d ; similes solidi sunt illi numeri a, b .

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.

E, 1. F, 3. G, 9.

H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.

Cum & suntis tribus minimis e, f, g in ratione a, c, d, b , inter e & g cadat medius proportio-

æ 9. IIX.

Q

ua-

§ 20. IIX.

218. VII

§ 17. VII.

219. IIX.

nal^{is} f ; β erunt e & g plani similes, quarum latera sint h, i, k, l . Et quia e, f, g sunt in ratione data minimi, aequè metiuntur ipsos a, c, d rationis ejusdem per m ; & eodem modo e, f, g minimi ipsos c, d, b , ejusdem rationis metiuntur per n ; ita ut m & n multiplicantes e, f, g producant a, c, d & c, d, b . Facti autem sunt e & f ex suorum laterum h, i , & k, l , multiplicatione mutua. Ergo, a, b producantur ex multiplicatione mutua h, i, m , & k, l, n , & sunt solidi. Quia verò ex m, n in f fiunt c, d , ut supra patet, erit c ad d , ut m ad n . Sed c ad d desit, ut c ad f , (quia n multiplicans e facit c ad d) id est, ut h ad k , vel i ad l . Inter planos enim similes e, g , est medius proportionalis f in ratione laterum homologorum h, k vel i, l : Igitur h ad k & i ad l erunt, ut m ad n ; & permutando h ad i , ut k ad l ; & i ad m , ut l ad n . Sunt ergò latera h, i, k proportionalia lateribus k, l, n ; ac propterea similes a, b solidi.

PROPOSITIO XXII.

Theorema 20.

Si tres numeri a, b, c deinceps sint proportionales, primus a , autem sit quadratus; & tertius c quadratus erit.

A, 36. B, 48. C, 64.

D, 6. E, 8.

F, 1.

Sumto

Sumto d latere quadrati a, cum d in se fiat a & erunt d & a ab unitate continuè proportionales, & convertendo a ad d, ut d ad f. Cum ergo inter a & c cadant tot. medij, quot inter eundem a & f & cadent etiam inter c & f tot; videlicet e. Cum itaq; f, e, c continuè proportionales sint, producet c ex e in se, eritq; quadratus.

a 9. IIX.
β 10. IIX.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema 21.

Si quatuor numeri a, b, c, d sint deinceps proportionales, primus a autem sit cubus; Et quartus d cubus erit.

A, 64. B, 160. C, 400. D, 1000.

F, 16.

H, 100.

E, 4.

H, 10.

I, 1.

Sumto e latere cubi a, ex e in se fiat f; & ex f in e, cubus a. Quia ergo in se facit f, & in f facit a, & erunt e f a ab unitate continuè proportionales; & convertendo a, f, e, i continuè proportionales. Cum ergo inter eundem a & d, cadant tot medij continuè proportionales, quot inter a & i, & cadent inter d & i totidem. Quare cum i, c, h, d sint continuè proportionales, fiet h ex g in se, & d ex g in h, eritq; d cubus.

a 9. IIX.

β 10. IIX.

Q 2

PRO.

PROPOS: XXIV.

Theorema 22.

Si duo numeri rationem habeant inter se, ut a ad b , quam Quadratus numerus ad Quadratum numerum ita c ad d , primus a autem sit Quadratus, & secundus b Quadratus erit.

A, 36. F, 48. B, 64.

C, 9 E, 12. D, 16.

 α 11. IIX. β 8. IIX. γ 22. IIX.

Cum enim sit a ad b , ut c ad d , inter q , c & d α cadat medius proportionalis, etiam inter a , b , β cadet medius f . Cum ergo a , f , b sint continuè proportionales, & a primus Quadratus, etiam b tertius Quadratus γ erit.

PROPOSITIO XXV.

Theorema 23.

Si duo numeri rationem inter se habeant a ad b , quam cubus numerus ad cubum numerum c ad d , primus a autem sit cubus, & secundus b cubus erit.

A, 8.

A, 8. G, 12. H, 18. B, 27.
C, 64. E, 96. F, 144. D, 216.

Cum enim sit a ad b , ut c ad d ; inter $q_3 c$ & a^{12} . IIX.
 d & cadant duo medij proportionales, e & f , βca . $\beta 8$. IIX.
dent etiam g, h inter a & b . Cum ergo a, g, h , $\gamma^2 3$. IIX.
 b sint continuè proportionales, & a primus cubus
sit, erit & b quartus cubus.

Corollarium 1.

Proportio cuiusvis numeri Quadra-
ti ad quemlibet non quadratum, non
potest reperiri in duobus numeris
Quadratis. Quia ex 24. huius ipse
quoq. Quadrati essent.

Corollarium 2.

Nec inter cubum & non cubum
cadit ratio cuborum; ob eandem cau-
sam ex 25.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema 24.

Similes plani numeri inter se ra-
tionem habent a ad b , quam quadra-
tus numerus ad quadratum numerum
ut d ad f .

Q 3

A, 20

A, 20. C, 30. B, 45.

D, 4. E, 6. F, 9.

Cum a & b sint plani similes, a cadit inter eos unus medius proportionalis c: Sumtis ergò tribus minimis in a, c, b ratione continua, α erunt extremi d, f quadrati. Quare cum sit ex æquo a ad b, ut d ad f, patet a ad b esse ut d quadratus ad f quadratum.

18. IIX. β 1. cor. 2. IIX.

PROPOS: XXVII.

Theorema 25.

Similiter solidi numeri a ad b rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum e ad b.

A, 240. C, 360. D, 540. B, 810.

E, 8. F, 12. G, 18. H, 27.

Cum a & b sint solidi similes, a cadunt inter eos duo medij proportionales c, d. Sumtis ergò quatuor minimis e, f, g, h in ratione continua a, c, d, b, β erunt extremi e, h cubi. Quare cum sit ex æquo a ad b, ut e ad h patet, h; ad b esse, ut e cubus ad h cubum Quod erat propositum.

19. IIX. β 1. cor. 2. IIX.

EU.



EUCLIDIS ELEMENTO- RUM

LIBER IX.

PROPOSITIO I.

Theorema 1.

SI duo similes plani numeri
 a, b multiplicantes se mu-
tuo faciant quēdam c ; pro-
ductus c erit Quadratus.

A, 6. E, 54.

D, 36. E, 108. C, 324.

A multiplicans seipsum faciat d quadratum. 17. VII.

*Cumq; itaq; ex a in a & b fiant d & c erit,
ut a ad b, ita d ad e. Sed inter a & b*

Q 4 ceu

β 18. IIX. *ceu planos similes unus β cadit medius proportiona-*
 γ 8. IIX. *lis. Ergò & inter d & c unus γ cadit, nempe E.*
 γ 22. IIX. *Itaq; cū tres d, e, c sint continuè proportionales, &*
primus sit quadratus, δ erit etiam c tertius qua-
dratus.

PROPOS: II.

Theorema 2.

Si duo numeri a , b se mutuò
multiplicantes, faciant Quadratum
 c ; similes plani erunt a , b .

A, 6. B, 54.
D, 36. C, 324.

α 17. VII. *A multiplicans seipsum faciat d quadratum.*
 β 11. IIX. *Erit, ut a ad b, ita d ad c, quia a multiplicans a &*
 γ 8. IIX. *b, produxit d & c. Sed inter d, c quadratos ca-*
 δ 20. IIX. *dit unus medius proportionalis: Ergò & inter a, b*
 γ cadit unus, ac propterea a, b δ erunt plani simi-
les.

PROPOS: III.

Theorema 3.

Si cubus numerus a seipsum mul-
tiplicans, procreet aliquem b ; pro-
ductus b cubus erit.

A, 8.

A, 8.

E, 16.

D, 4.

F, 32.

C, 2.

B, 64.

I, 1.

Sit Clatus cubi a, ex quo in se fiat d, & ex
 c in d ipse cubus a. Itaq; a metietur c ipsum d per
 c. Sed & unitas i eundem c β metitur per c. Ergò
 unitas ipsius c est eadem pars, quæ c ipsius d. γ Qua- α 7. ax.
 re ut unitas ad c, ita c ad d. Rursus etiam d β 5. ax.
 metitur a per c, quòd c multiplicans d fecit a. Sed γ 20. def.
 quia etiam c metiebatur d per c; Ergò d ipsius a
 erit eadem pars, quæ c ipsius d, γ Ergò est ut c
 ad d, ita d ad a. Sed ut est c ad d, ita erat u-
 nitas ad c. Ideoq; ut unitas ad c ita c ad d & d
 ad a: adeoq; inter unitatem & a cadunt duo me-
 dij proportionales.

Ceterum quia a metitur b per a; quod a in
 se producebat b, & unitas eundem a per a metitur,
 erit unitas eadem pars ipsius a, quæ a ipsius b; &
 sic, ut i ad a, ita a ad b. Sed cum inter i & a
 cadant duo medij proportionales, ergò totidem in-
 ter a & b, cadent f & e. Cum itaq; inter qua- δ 8. IIX.
 tuor a, e, f, b continuè proportionales primus sit cu- ϵ 23. IIX.
 bus, erit etiam quartus b cubus.

PROPOS: IV.

Theorema 4.

Q s

Si

PROPOS: IV.

Theorema 4.

Si cubus numerus a cubum numerum b multiplicans, faciat aliquem; factus cubus erit.

A, 8, B, 27.
D, 64. C, 216.

α 17. VII.
β 12. IIX.
γ 8. IIX.
δ 3. IX.
ε 23. IIX.

A in se producat d. Quia ergo ex a in a & b sunt d & c, erit ut a ad b, ita d ad c. Sed inter a & b cubos β cadunt duo medij proportionales: γ Ergo & inter d & c. Quare cum d primus δ sit cubus, & c quartus ε cubus erit.

PROPOS: V.

Theorema 5.

Si cubus numerus a numerum quendam b multiplicans faciat cubum c ; & multiplicatus b cubus erit.

A, 8. B, 27.
D, 64. C, 216.

α 3. IX.

A in se producat d, α cubum. Cum ergo ex a in a

in a & b fiant d & c , β erit, ut a ad b , ita d ad c . β . 17. VII.
 Sed inter d, c , cubos cadunt duo medij proportiona- γ 12. IIX.
 les. δ Ergò & totidem inter a & b ; adeoq; a exi- δ 8. IIX.
 stente cubo etiam b cubus: erit. ϵ 23. IIX.

PROPOS: VI.

Theorema 6.

Si numerus a seipsum multipli-
 cans, faciat cubum b ; Et ipse a cubus
 erit.

A, 8. B, 64. C, 512.

Ex a in b fiat c , qui ex definitione est cubus. α 5. IIX.

Quoniam ergò b cubus multiplicans a , fecit c , a e-
 rit & a cubus.

PROPOSITIO VII.

Theorema 7.

Si compositus numerus a aliquē
 b multiplicans, quempiam c faciat:
 factus c solidus erit.

A, 6. B, 7. C, 42.

D, 2. E, 3.

Quia enim a est solidus, a metitur ipsum a -
 lius præter unitatem, ut d per e ; Ergò & d in e β pro- α 13 def.
 ducit a . Cum ergò b in a faciat c , erit c ex trium γ 12. VII.
 d, e, b , ceu laterum multiplicatione mutua ortus, β 9. ax.
 adeoq; ex definitione solidus.

PRO-

PROPOSITIO IIX.

Theorema 8.

Si ab unitate quotcunque numeri
 $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m$, deinceps pro-
 portionales fuerint: Tertius b qui-
 dem ab unitate Quadratus est, & unū
 intermittentes d, f, h, k, m , omnes:
 Quartus c autem est cubus, & duos
 intermittentes f, i, m , omnes: Septi-
 mus f verò cubus simul & Quadra-
 tus, & quinque intermittentes m o-
 mnes.

Vn. I. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729.
 G, 2187. H, 6561. I, 19683. K, 59049.
 L, 177147. M, 531441.

α 5. ax.
 β 9. ax.

γ 22. IIX.

Cum enim unitas α metiatur a per a , metie-
 tur quilibet sequentem per ipsum a , quia continūe
 proportionales sunt: β Ideoq; a multiplicans seipsum
 producit b quadratum. Cumq; b, c, d sint conti-
 nuē proportionales, & b Quadratus, etiam d verit
 Quadratus: ita & trium sequentium proportiona-
 lium tertius ferit Quadratus, & iterum h, k, m
 & c. Rursus cum a in se faciat b , & idē a in b faciat
 c , erit

c, erit ex definitione c cubus. Ergo cum 4. proportionalium c, d, e, f primus c sit cubus d erit & quartus f cubus. Denique cum septimus ab unitate f & Quadratus & cubus sit demonstratus; etiam intermissis quinque g, h, i, k, l; m erit & Quadratus & cubus. d 23. IIX.

PROPOS: IX.

Theorema 9.

Si ab unitate quocunque numeri a, b, c, d, e, f, deinceps proportionales fuerint, qui verò post unitatem a sit Quadratus; & reliqui omnes b, c, d, e, f, Quadrati erunt. Ac si qui post unitatem a sit cubus, & reliqui omnes b, c, d, e, f, cubi erunt.

A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024.

1. Unitas.

F, 4096.

A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768

F, 262144.

Quia enim b tertius ab unitate a est Quadratus, & unum intermittentes, omnes d, f, sunt g. a 3 IX.
a, b, c continuè proportionales, & a primus quæ b 11 IIX.
dratus, β erit & c Quadratus. Eodem modo inter c

3. IX.
2 3. IIX.

ter c, d, e proportionales c existente quadrato, etiam e quadratus erit, & sic deinceps reliqui erunt quadrati. Ita si a primus ab unitate sit cubus: Quia c ab unitate quartus a est cubus & duos intermittentes omnes, etiam f erit cubus. Cumq; unitas metiatur a per a , & a cubus metiatur b per seipsum, & erit & b cubus. Cum itē a, b, c, d sint 4. continuè proportionales, & a primus sit cubus, d erit & d quartus cubus. Eodemq; modo reliqui ordine cubi ostendantur, sumtis semper continuè proportionalibus, ut b, c, d, e . Quia enim b est cubus. Ergo & c & c .

PROPOS: X.

Theorema 10.

Si ab unitate quocunque numeri ($a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m$) deinceps proportionales fuerint, qui a verò post unitatem non sit quadratus, neque alius ullus quadratus erit, præter tertium b ab unitate & unum intermittentes omnes d, f, h, k, m . At si post unitatem non sit cubus, neque alius ullus cubus erit, præter quartū c ab unitate, & duos intermittentes omnes f, i, m .

1. Vn.

A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64.

1. *Vnitas.* G, 128. H, 256.

I, 512. K, 1024. L, 2048. M, 4096.

Si enim aliquis alius esse potest quadratus, esto c. Quoniam est, ut a ad b, ita b ad c; conuertendo c ad b erit, ut b ad a. Sed c est quadratus ex hypothesi: a. Ergo & a. Quod absurdum. Quia ponitur a 22. IIX. non quadratus. Idē etiā de ceteris concludendū. It a, p 23. IIX. si quis alium, ut d præter c ponat cubum, quia a, b, c, d sunt continuè proportionales, conuersim proportionales erunt. Itaq; cum d primus sit cubus, etiam a quartus cubus erit. Quod est contra hypothesin.

PROPOSITIO XI.

Theorema. II.

Si ab unitate quocunque numeri *a, b, c, d, e, f*, deinceps proportionales fuerint, minor *b* maiorem *f*, metitur per aliquem *d* eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

1. *Vn.* A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 242.

F, 729.

Cū ex æquo sit ut *b* ad *f*, ita unitas ad *d*, quod 5. *a, b, c, d, e, f*, cū 5. numeris & unitate *abcd* eandē rati-

α 20. def. VII.
 β 5. ax.

rationem habeant, a què etiam Unitas metietur numerum d , atq; b ipsum f . Sed β unitas metitur d per b , ergo & b ipsum f per d metitur. Eodem modo d metitur ipsum e pro a , quod sit, ut d ad e , ita unitas ad a . Sic & a ipsum f per e metietur, cum sit ut a ad f , ita unitas ad e . Et ita de ceteris,

PROPOSITIO XII.

Theorema 12.

Si ab unitate quotcunque numeri a, b, c, d , deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum ultimum d metiuntur, iidem & cum a , qui unitati proximus est, metientur.

1. Vn. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 3.

α 31. VII.
 β 27. VII.
 γ 26. VII.

Sin minus. Si primus numerus e metiens quidem d , nò a metitur erunt a & e primi; & cum a multiplicans seipsum producat b , β erunt & e b inter se primi; & itemq; & e & c , cum c ex a in b primis ad numerum e fiat. & adeoq; & e & d inter se erunt primi, cum d ex a in c fiat. Quod est contra hypothefin, quæ e ipsum d metiri ponebat.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

Theorema. 13.

Si ab unitate quotcunque numeri a, b, c, d , deinceps proportionales fuerint, qui verò a post unitatem, primus sit; Maximum d nullus alius metitur, præter eos a, b, c , qui sunt in numeris proportionalibus.

1. *Vn.* A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.

H ---- G ---- F ---- E ----

Metiatur ipsum d , diversus ab a, b, c , qui sit e ; erit ille vel primus, vel compositus. Si sit primus, metiens extremum d , & metietur etiam a 12. IX. primum. Quod absurdum. Cum ergo e non sit β 33. VII. primus, esto compositus, β metiens ipsum primus a 71. I. ax. lius præter a nullus erit. Nam cum e metiatur extremum d , quilibet primus metiens e , & metietur $\& d$, metiens vero d maximum, & metitur $\& a$ unitati proximum; proinde duo primi se mutuo metientur, quod absurdum, aut metiens ipsum e primus, erit ipse a .

Porro metiatur a ipsum e per f . Itaq; a 17. VII. multiplicans f & c binos faciet binos e & d ; & eritq; e ad d , ut f ad c . Quare si e metitur d , etiam f

R

meti-

metitur c : adeoque $\&$ f eodem modo, ut c , compositus erit, quem solus a metitur. Metiatur ergo a ipsum f per g . Ideoque a binos g $\&$ b multiplicans producet f $\&$ c , d' eritq, f ad c , ut g ad b : Sed f metitur ipsum c , ergo $\&$ g metitur b . Si jam g esset primus meties b , metiretur etiam a . Quod absurdum. Nullus ergo alius metitur g prater a . Deniq, metiatur a ipsum g per h . Binos ergo a $\&$ h multiplicans a producet b $\&$ g , d' eritq, g ad b , ut h ad a . Sed g metitur ipsum b . Ergo $\&$ h ipsum a primum. Itaq, h equalis est ipsi a . Cum autem ex h $\&$ g producat^{ur} idem b , qui ex a in seipsum, erit a medius proportionalis inter b $\&$ g ; cumq, a metiatur g , etiam h metietur a , primum primum. Quod absurdum. Itaq, prater proportionales a, b, c , nullus alius extremum d metitur.

20. VII.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 14.

Si minimum numerum a , primi numeri b, c, d metiantur: nullus alius primus numerus illum metietur, prater eos b, c, d qui à principio metiebantur.

Si

A.....

B...C...D.....

E---F---

Si potest, metiatur e primus ipsum a per f .
 Idem ergo e multiplicans f facit a . Ideoq; singuli a . 2x. 2
 b, c, d alterum illorum e vel f metientur. Non 32. VII.
 ipsum e primum; ergo ipsum f minorem ipso a .
 Quod contra hypotesin.

PROPOS: XV.

Theorema 15.

Si tres numeri a, b, c deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum eis rationem habentium, duo quilibet a, b simul, b, c , a, c numeri ad reliquum c, a, b primi erunt.

A, 9. B, 12.

C, 16.

D, 3. E, 4.

Sumtis duobus d, e in eadem cum illis proportionem minimis, a patet d in seipsum & e pro- 2. IIX.
 ducere a & b , & e in se facere c . Cum itaq; d &
 e in sua proportionem minimi, etiam b sint primi &
 erit & uterque d, e simul ad quemlibet illo- 24. VII.
 rum primus. Itaque cum tam compositus, ex d, e 30. VII.

R 2 quam

- quã ipse d ad e primus sit, d erit quoq; ex d e tan-
 26. VII. quam uno factus numerus in d ad eundem e pri-
 mus. • Qui autem sit ex d e tanquam uno in d æ-
 3. II. qualis est & numero a facto ex d in se & numero b
 27. VII. facto ex d in e . Igitur ab compositi primi sunt
 ad e . & ita ad c , qui sit ex e in seipsum.

B, 12. C, 16.

A, 9.

D, 3. E, 4.

Deinde qui uterq; d e simul γ est primus
 ad quemlibet ipsorum d , e ; sit, ut numerus ex d e
 tanquam uno, factus in e , d primus sit ad d (cum
 tam ex d e compositus, quã ipse e primus sit ad d)
 Sed qui sit ex d e, tanquam uno in e , æqualis est &
 numero c facto ex e in se; & b facto ex d in e . ergo
 & b c simul compositi ad d primi sunt, & adeoq; ad
 ipsum a , qui ex d in se est factus; primi sunt b & c
 simul compositi.

A, 9. C, 16.

B, 12.

D, 3. E, 4.

Deniq; quia, ut antea uterq; d & e simul ad
 quemlibet ipsorum γ primus est; & è contrario qui-
 libet ipsorum d , e primus est ad compositum ex d e;
 d erit

erit etiam factus ex d in e ad compositum ex d e
 primus, & sic ex d in e factus ad eum, qui ex d e
 tanquam uno in se primus erit. Sed qui fit ex d
 e tanquam uno in se æqualis est eis, qui fiunt ex d ^{14. II.}
 & e in seipsos, una cum eo qui ex d in e bis. Quoni-
 am itaq; duo numeri simul, nempe compositus ex
 d e, qui fiunt ex d & e in seipsos; & ex eo, qui fit
 ex d in e , atq; is qui fit d in e primi sunt ad ali-
 quem ipsorum, cum videlicet, qui fit ex d in e , ut
 ostensum est, & erunt etiam duo illi, compositus ex d ^{13. VII.}
 & e in seipsos & ex eo, qui fit ex d
 in e , atq; is qui fit ex d in e inter se primi. Rur-
 us, quia duo numeri simul, utpote compositus ex d e,
 qui fit ex d & e in seipsos, atq; is, qui fit ex d in e
 ad aliquem ipsorum, cum nimirum, qui fit ex d in
 e , primi sunt ostensi; & erunt etiam duo illi, compo-
 situs ex d e, qui fiunt ex d & e in seipsos, atq; is, qui
 fit ex d in e , inter se primi. Itaq; cum ex d & e in
 seipsos fiunt a & c , item ex d in e fiat b ; erunt a &
 c simul compositi primi ad b .

PROPOS.: XVI

Theorema 16.

Si duo numeri a & b primi inter
 se fuerint: Non erit, ut primus a ad
 secundum b , ita secundus b ad alium
 quendam c .

R 3

Ergo

A + + + + +

B + + + + +

C - - - - -

Est, si potest tertius proportionalis c. Cum
 a) 23. VII. ergò a & b sint primi, & in sua ratione a minimi;
 c) 21. VII. ipsi ß æquè metientur b & c numeros in eadem ra-
 tione; a ipsum b, & b ipsum c. Cumq; a etiam me-
 tiatur seipsum. Duos ergò a & b inter se primos
 metietur numerus a. Quod absurdum.

PROPOS: XVII.

Theorema 17.

Si fuerint quotcunque numeri
 a, b, c, d, deinceps proportionales, ex-
 tremi autem ipsorum a, d primi in-
 ter se sint: Non erit, ut primus a ad
 secundum b, ita ultimus d, ad alium
 quempiam e.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E - - - -

a) 23. VII. Est, si potest, ut a ad b, ita d ad e. Erit er-
 ß) 21. VII. gò permutando, ut a ad d, ita b ad e: sunt au-
 x) 11. ax. tem a, d primi sue rationis æ minimi: igitur ß æ-
 què metientur, ipsos b e. Est verò, ut a ad b, ita b
 ad c. Si ergò a metitur b, etiam b & metitur c.
 Quia item est, ut b ad c, ita c ad d; cum b me-
 tiatur

metietur c etiam c metietur d: Quare a metiens c
metietur etiam d. Metitur vero & a seipsum. Er-
gò metitur a, d inter se primos. Quod absurdum.

PROPOSITIO XIIIX.

Problema I.

Duobus numeris a, b datis, con-
siderare, an ipsis possit tertius pro-
portionalis inveniri.

A, 4.

B, 7.

Si a & b dati sint primi, non potest reperi-
ri tertius proportionalis. Si non primi, tum b mul-
tiplicans seipsum faciet c , Aut ergò a metitur c ,
per d , & d est ipse tertius proportionalis: Cum e-
nim a metitur c per d , fiet c ex a in d . Fit autem
idem c ex b in b : Ergò qui sub extremis a, d con-
tinetur c factus ex b in seipsum medio aequalis est.
Quare erit ut a ad b , ita b ad d .

A, 4.

B, 6.

C, 36.

Aut a non metitur c , & tum nequit reperiri
tertius proportionalis. Si verò ponatur d tertius.
Quia est, ut a ad b , ita b ad d , Ideo numerus sub ex-
tremis a, d contentus, aequalis est ei, qui sit a medio
 b , id est, c . Cum itaq; c ex a in d fiat, metietur a
ipsum c per d , quod absurdum. Quia ponebatur
non metiri.

A, 6.

B, 4.

D ---- C, 16.

R 4

PRO-

PROPOS: XIX.

Problema 2.

Tribus numeris a, b, c datis; considerare, an possit ipsis quartus proportionalis inveniri. (*Sive deinceps proportionales sint sive non*)

A, 8. B, 12. C, 18. E, 27. D, 216.

A, 4. B, 8. C, 9. E, 18. D, 72.

29. 21. B multiplicans c faciat d. Aut a metitur d per c quantum proportionalem. = Fit enim d ex a per cōstr. in c, & ex b in c. Ideoq; cum sub extremis a, c comprehensus, æqualis sit ei, qui sub intermedijs, erit, ut a ad b, ita c ad e.

A, 4. B, 6. C, 9. E - - - D, 54.

A, 3. B, 4. C, 10. E - - - D, 40.

27. 21. Aut a non metiatur d, & tum nequit inveniri quartus proportionalis. Si tamen potest, sit e. Cum 4. a, b, c, e sint proportionales, extremis a, e contentus, æqualis β erit contento intermedijs b, c, hoc est, d. Cum itaq; d ex a in eis fiat, metietur a ipsum d per c, quod est absurdum. Quia ponebatur non metiri.

PRO-

PROPOSITIO XX.

Theorema 18.

Primi numeri plures sunt, omni
proposita multitudine primorum
numeratorum a, b, c .

A 2. B 3. C 5.

D
.....

Sumto minimo d , quem a, b, c metiantur, a. 38. VII.
apponatur ipsi unitas e . Si totus $d e$ est pri-
mus, factum est, quod vult propositio, quia tum plu-
res sunt primi a, b, c, d, e .

A 3. B 5. C 7.

D, 105. E

G 53.

Si totus $d e$ sit non primus, e metietur ipsum
 g , qui nulli propositorum a, b, c , idem esse potest. Si e 33. VII.
tamen sit, metietur etiam g ipsum d , sicut eum me-
tiuntur a, b, c . Ideoque g metiens totum $d e$, & de-
tractum d , metietur etiam reliquum e unitatem
quod absurdum. Ergo g primus, idem non est, v 11. IX.
R 5 qui.

qui unus ipſorum a, b, c . Sunt ergò a, b, c, g primi plures, quam a, b, c . Adeoq; & in infinitum plures primi inveniri poſſunt.

PROPOS: XXI.

Theorema 19.

Si pares numeri quotcunque ab, bc, cd componantur; totus par erit ad ,

A..... B....C.....D

Cum enim quilibet par habeat partes duas æquales; ſi æqualibus addantur æquales, omnes dimidia dimidijs ſunt æquales. Quare totus $a d$ erit par, dimidiorum compoſitorum duplus ex definitione.

PROPOSITIO XXII.

Theorema 20.

Si impares numeri quotcunque ab, bc, cd, de componantur; multitudo autem ipſorum ſit par; totus par erit ae .

A...B.....C.....D.....E

Cum propoſiti numeri ſint impares, quilibet differt unitate à pari, ex definitione. Singulis unita-

unitate detracta, quilibet reliquorum erit par. α 21. IX.
 Quare & à reliquis compositus α parerit. Sed unitatum detractarum multitudo est par. Ergo & totus α e par erit.

PROPOS: XXIII.

Theorema 21.

Si impares numeri quotcunque a, b, bc, ce , componantur, multitudo autem ipsorum sit impar; & totus ac impar erit.

$A + + + B + + + + C + + + + D + E$.

Ablata unitate d ex ce , erit cd par. Sed ac ex imparibus multitudine paribus est compositus. Ergo & par α erit, huic si addatur cd totus α 22. IX.
 β 21. IX.
 ad par β erit. Sed addita unitate d ex numero ad , totus ac impar erit, quia par à pari differt per unitatem.

PROPOS: XXIV.

Theorema 22.

Si à pari numero ab detrahatur par cb : & reliquus ac par erit.

$A + D + + + + C + + + + B$

Si non detracta a d unitate erit dc par. Ideoq; & compositus db α erit par: ac proinde cō- α 21. IX.
 posito db addita unitate ad , totus ab impar fiet. Quod est absurdum; quia ponitur par.

PRO.

PROPOS: XXV.

Theorema 23.

Si à pari numero a b impar c b ,
detrahatur ; & reliquus a c impar
erit.

$$A+++++C.D++++B$$

*Ex impari c b ablata unitate c d , reliquus
d b par erit. Quia ergò totus a b ponitur par
ablatò pari db , reliquus a b par a erit, ablataq; u-
nitate cd reliquus a c impar erit.*

24.IX.

PROPOS: XXVI.

Theorema 24.

Si ab impari numero a b impar
 c b detrahatur : reliquus a c par erit.

$$A++++C++++D.B$$

*Ex imparibus ab , cb unitate d b detracta,
reliquit a d , c d pares erunt. Ex pari a d ablato
pari cd , reliquus a c par a erit.*

24.IX.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema 25.

Si

Si ab impari numero a b par c b
detrahatur; reliquus a c impar erit.

$A + D + \dots + C + \dots + B$

Ab impari a b unitate a d sublata, erit re-
liquus db par; cui d b rursus auferatur c b
par, reliquus dc par quoque a erit: ac proinde uni- a 24. IX.
tate a d addita, fiet a c impar.

PROPOSITIO XXIIIX.

Theorema 26.

Si impar a numerus parem b ,
multiplicans, fecerit aliquem c , fa-
ctus par erit.

$A + \dots + B + \dots$

$C + \dots + \dots + \dots$

Cum c fiat ex a in b ; componetur c ex tot
numeris ipsi b aequalibus, quot fuerint unitates in
 a . Est autem b par. Ergo & c ex tot b paribus a 21. IX.
compositus, quot in a sunt unitates, par quoque
 a erit.

PROPOS: XXIX.

Theorema 27.

Si impar numerus a imparem b
mul-

multiplicans fecerit aliquem c ; factus c impar erit.

A . . . B

C

23. IX. Cum c ex a in b fiat, componetur c ex tot numeris ipsi b equalibus, quot in a fuerint unitates. Est autem b impar. Ergo & c ex tot imparibus compositus, quot in a sunt unitates, impar quoque c erit. Hinc nascuntur duo Corollaria.

Corollarium 1.

Par numerus in se multiplicatus, producit parem.

Corollarium 2.

Impar numerus in se multiplicatus producit imparem.

PROPOSITIO XXX.

Theorema 28.

Si impar numerus a parem b metiatur, & illius b dimidium d metietur.

A . . . C E . .

B

D

Me-

Metiatur a ipsum b per c . Erit utiq; c par
 Si enim esset impar, sequeretur a imparem in c
 imparem efficiere imparem. Quod absurdum,
 quia b ponitur par: Ergo & c erit par. Itaq; 29. IX.
 cum a per omnes c unitates efficiat totum b : Idem
 a per dimidium unitatum c ipsum d efficiet, ipsius
 b dimidium. Metietur ergo a ipsum d per dimi-
 dium unitatum c , id est, c .

PROPOS: XXXI.

Theorema 29.

Si impar numerus a ad aliquem
 numerum b , primus sit: & ad illius
 duplum c primus erit.

A.....B.....

C.....

D---

Si a non sit primus ad c , metiatur eos d , qui
 omnino erit impar. Si enim esset d par, cum me- 28. IX.
 tiatur imparem, a erit a , factus ex d pari, in eum β 30. IX.
 numerum, per quem metitur, par; Quod absur-
 dum, quia ponebatur a impar. d ergo impar
 metiens c parem, β metietur quoq; dimidium nu-
 meri c . Idem autem d metitur & a . Ergo & a , b
 inter se primos metietur d . Quod absurdum, a ergo
 ad c est primus.

Hinc

Hinc patet Corollarium: Numerum imparem, qui ad numerum aliquem est primus, primum quoque esse, non solum ad duplum ejus (x 37. IX.) sed etiam ad quadruplum, octuplum, & ita per proportionem duplam in infinitum excurrendo. *Quia semper sequentes precedentium sunt dupli.*

PROPOS: XXXII.

Theorema 30.

Numerorum a, c, d à binario a duplorum, unusquisque est pariter par tantum.

1. Un. $A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.$

211. IX.

Exposita enim unitate sunt numeri ab unitate & deinceps proportionales: Quare a quemlibet b, c, d , & minor majorem per aliquem ipsorum a, b, c, d metietur; Qui cum omnes sint pares, & binarii nimirum dupli ipsorum quemlibet a metietur numerus par per parem. Erit ergo quilibet pariter par ex definitione. Sed quod sint pariter pares tantum ita ostenditur. Cum enim ab unitate sint continuè proportionales, & unitati proximus primus

fit primus, utpote binarius, nullus præter ipsos a, b, c, d quemlibet ipsorum β metietur. Quia cum omnes sint pares, quemlibet ipsorum par numerus per parem γ metietur.

$\beta 13. IX.$

$\gamma 15. IX.$

Scholium.

Hinc deducitur Ars Arithmeticorum inveniendi omnes numeros pariter pares. Nulli enim præter duplos à binario a, b, c, d, e, f, & c. tales esse possunt. Si enim esset quispiam g, ejus h dimidium par esset; quia si impar esset, g esse f & pariter impar contra hypothesein; ipsius h, dimidiū sit i, qui ob eandem rationem par erit, & sic deinceps usq; ad unitatem. Cum ergo dimidium i sit unitas, h, g erunt dupli ab unitate atq; ita in ordine priorum contra hypothesein.

$\delta 32. IX.$

A 4. B 4. C 16. D 32 E 64. F 128.

I --- H ---- G -----

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema 31.

Si numerus a dimidium b habeat imparem: pariter impar est tantū.

A + + + + + + + +

B + + + + C + +

D ---- E ----

Cum a habeat dimidium b imparem, metietur binarius c par numerus ipsum a per b. a itaq; ex de-

S

ex de-

α 9. ax.
 619. VII.

ex definitione erit pariter impar. Quod si tamen esse talis negetur, erit quoque pariter par. Ideoque ipsum aliquis par per d parem c metitur, & ex d secundo in tertium e fiet a qui ex c primo in b quartum β eritque, ut c ad d , ita e ad b . Metitur autem c parem d . Ergo & e par metitur ipsum b imparem. Quod absurdum.

Scholium.

β 33. IX.
 234. IX.

Imparium omnium dupli omnes sunt, & pariter impares, & tantum.

PROPOS: XXXIV.

Theorema, 32.

Si par, & numerus neque à binario duplus sit, neque dimidium habeat imparē: pariter par est, & pariter impar.

A + + + + +

α 32. IX.

β 29. IX.

Cum enim dimidium habeat parem per eum metietur ipsum binarius par, & sic pariter par est. Sed & pariter impar. Diviso enim a bisariam, ejusque dimidio rursus bisariam & sic deinceps, tandem in imparem aliquem incidemus. Si enim ultimum occurreret binarius, esset a duplus à binario, quod contra hypothesein. Cum ergo occurrat impar, ille metietur a per parē, non per imparem, β quia impar multiplicans imparem, produceret imparem a ; Contra hypothesein. Est itaque & pariter impar.

Scholium.

Omnes, relictis duplis à binario, & qui dimidios habent impares, pares

res; reliqui & pariter pares & pariter
impares sunt.

PROPOS: XXXV.

Theorema 33.

Si sint quotcunque numeri $a, b, c,$
 $d, e, f,$ deinceps proportionales, de-
trahantur autem à secundo $b, c,$ & ul-
timo $e, f, g, c, h, f,$ æquales ipsi primo a :
Erit ut secundi excessus $b, g,$ ad primū
 $a,$ ita ultimi excessus e, h ad omnes, $a,$
 $b, c, d,$ ipsum antecedentes.

A

B G C

D

E K I H F

Ab e, f detrahantur $f, i,$ & f, k ipsis b, c & d æ-
quales. Quoniam f, i est æqualis b, c & ablatus f, h
ablato $g, c,$ etiam reliquus $h, i,$ reliquus g, b æqua-
lis erit. Sed quia est, ut a ad $b, c,$ ita b, c ad $d,$ &
 d ad $e, f;$ convertendoq; ut e, f ad $d,$ ita d ad $b, c,$
& b, c ad a : estq; k, f ipsi d & i, f ipsi $b, c,$ & h, f
ipsi a æqualis; erit etiam ut e, f ad $k, f,$ ita k, f ad
 i, f & i, f ad $h, f.$ Igitur dividendo ut e, k ad $k, f,$ ita
 k, i ad $i, f,$ & i, h ad $h, f,$ ac proinde ita etiam æ erunt $a, 12. VII.$
omnes e, k, k, i, i, h ad omnes $k, f, i, f, h, f,$ id est, to-
tus e, h ad d, b, c, a simul (quibus $k, f, i, f, h, f,$ sumti
sunt æquales) ut i, h ad $h, f,$ hoc est, ut b, g ad $a,$ qui
illis sunt æquales.

S a

Scholium.

Scholium.

Per hoc theorema summam continuè proportionalium ex primo, secundo & ultimo terminis datis invenire licet.

PROPOS: XXXVI.

Theorema 34.

Si ab unitate quotcunque a, b, c, d numeri deinceps exponantur in dupla proportionē, quoad totus compositus fiat primus e ; & totus e hic in ultimum d multiplicatus faciat aliquem f , Factus erit perfectus.

1. *Vn.* A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.

E, 31. G --- 62. H, 124. I, 248. F ---- 496.

K, 31. M, 31. L, 31. N, 465.

O ---- P ----

Sumantur ab e tot dupli; quot sunt a, b, c, d videlicet e, g, h, i : e erit ex aquo ut a ad d , ita e ad i , factusq; ex a , in i e equalis est facto ex d in e . Sed f est factus ex d in e . Idem ergo f ex a in i fit. Itaq; i metitur f per a binarium, & ita f ipsius i est

14. VII.

A. 19. VII.

i est duplus. Quare e, g, h, i, f, deinceps sunt du-
 pli. Ex secundo g & ultimo f detrahantur aqua-
 les ipsi e, qui sint k, l, relictis m, n excessibus; & E-
 rit ut m ad e; ita n ad omnes antecedentes e, g,
 h, i simul. Sed m est equalis ipsi e, dimidius vi-
 delicet dupli g. Ergo & n equalis ipsis e, g, h, i 235. IX.
 simul. At unitas & a, b, c, d equales sunt l, l ipsi e
 & k equalis. Itaq; totus l, n, id est, f equalis erit
 unitati & numeris a, b, c, d, e, g, h, i simul. Qua-
 re cum unitas & a, b, c, d, e, g, h, i metiantur i-
 psum f (Quia enim f ex e in d est factus, & metie-
 tur d ipsum f e eundemq; f unitas & a, b, c, d, 7. IX.
 qui ipsum d metiuntur. Rursus cum i metiatur i
 ipsum f, eundem f & metientur e, g, h, ^{qui} per ipsum l 11. IX.
 metiuntur: ob proportionem duplam) nec alius ul-
 lus metiatur ipsum f. Erunt ergo unitas & nu-
 meri a, b, c, d, e, g, h, i omnes partes quas f habere
 potest; quibus simul sumtis equalis cum sit f, erit f
 perfectus ex definitione. Si alius quidam nume-
 rus potest metiri ipsum f, esto o per p, ex quibus
 fiat idem f, qui ex e in d. Cum ergo ex e pri-
 mo in d quartum fiat idem numerus, qui ex p se- 9. ax.
 cundo in o tertium. Ergo ut e ad p, ita o ad
 d. Cum autem a, b, c, d sint proportionales ab
 unitate, & a primus, nullus præter illos, o meti-
 tur, d. Ergo nec o alius ab ipsis a, b, c positus; &
 cum sit e ad p, ut o ad d, neq; e ipsum p me- 13. IX.
 tietur, qui cum e sit primus, & inter se sunt primi, 31. VII.

S 3

& in:

Scholium.

Per hoc theorema summam continuè proportionalium ex primo, secundo & ultimo terminis datis invenire licet.

PROPOS: XXXVI.

Theorema 34.

Si ab unitate quotcunque a, b, c, d numeri deinceps exponantur in dupla proportionē, quoad totus compositus fiat primus e ; & totus e hic in ultimum d multiplicatus faciat aliquem f , Factus erit perfectus.

1. *Vn.* A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.

E, 31. G --- 62. H, 124. I, 248. F --- 496.

K, 31. M, 31. L, 31. N, 465.

O ---- P ----

Sumantur ab e tot dupli; quot sunt a, b, c, d videlicet e, g, h, i : a erit ex a quo ut a ad d , ita e ad i , factusq; ex a , in i & equalis est facto ex d in e . Sed f est factus ex d in e . Idem ergo f ex a in i fit. Itaq; i metitur f per a binarium, & ita si plures i est

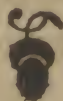
14. VII.
A. 19. VII.

i est duplus. Quare e, g, h, i, f, deinceps sunt du-
 pli. Ex secundo g & ultimo f detrahantur equa-
 les ipsi e, qui sint k, l, relictis m, n excessibus; & E-
 rit ut m ad e; ita n ad omnes antecedentes e, g,
 h, i simul. Sed m est equalis ipsi e, dimidius vi-
 delicet dupli g. Ergo & n equalis ipsis e, g, h, i 235. IX.
 simul. At unitas & a, b, c, d equales sunt l, l ipsi e
 & k equalis. Itaq; totus l, n, id est, f equalis erit
 unitati & numeris a, b, c, d, e, g, h, i simul. Qua-
 re cum unitas & a, b, c, d, e, g, h, i metiantur i-
 psum f (Quia enim f ex e in d est factus, & metie-
 tur d ipsum f e eundemq; f unitas & a, b, c, d, d 7. IX.
 qui ipsum d metiuntur. Rursus cum i metiatur i
 ipsum f, eundem f & metientur e, g, h, per ipsum l 11. IX.
 metiuntur: ob proportionem duplam) nec alius ul-
 lus metiatur ipsum f. Erunt ergo unitas & nu-
 meri a, b, c, d, e, g, h, i omnes partes quas f habere
 potest; quibus simul sumtis equalis cum sit f, erit f
 perfectus ex definitione. Si alius quidam nume-
 rus potest metiri ipsum f, esto o per p, ex quibus
 fiat idem f, qui ex e in d. Cum ergo ex e pri-
 mo in d quartum fiat idem numerus, qui ex p se- 9. 2X.
 cundo in o tertium. Ergo ut e ad p, ita o ad
 d. Cum autem a, b, c, d sint proportionales ab
 unitate, & a primus, nullus præter illos o meti-
 tur, d, Ergo nec o alius ab ipsis a, b, c positus; &
 cum sit e ad p, ut o ad d, neq; e ipsum p me- 13. IX.
 tietur, qui, cum e sit primus, & inter se sunt primi, 31. VIIa.

S 3

& in:

& in sua ratione λ minimi, & o ipsum e æquè ac
 a 23 VII. p ipsum d μ metiantur. Ergò cum d nullus præter
 p 21. VII. a b c, metiatur, p erit illorum aliquis. Sit idem
 qui b, & quot b, c, d, totidem e, g, h, sumantur,
 æ eritq, ut b ad d ita e ad h, & idem numerus fi-
 et ex b in h, qui ex d in e, idest, qui ex o in p.
 Itaq, ut p ad b ita h ad o. Sed p est idem qui b.
 Ergò & o idem qui h. Quod absurdum.
 Ponebatur enim alius.



EU.



EUCLIDIS ELEMENTO- RUM

LIBER X.

Definitiones.

I.

Commesurabiles magnitudines dicuntur, quas eadē mensura metitur. Ita etiam 21 & 13 palmorū lineæ sunt commens. quia & unus palmus & dimidiū & $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{8}$ ipsas metitur. Idem & de superficiebus, quas superficies eadem, & corporibus, quæ corpus idem metitur, intelligitur.

2. Incommensurabiles autem, quarum nullā communem mensuram

S 4

con-

contingit reperiri. Tales sunt latus & Diagonius quadrati, ut in propositione ultima demonstratur, & multæ alia lineæ de quibus in propositionibus. Item q̃ & superficies & corpora.

3. Rectæ lineæ potentia commensurabiles sunt, cum quadrata earum idem spacium metitur. Antea lineæ commensurabiles longitudine sunt in 1. definitione explicatæ: hîc verò longitudine aliàs incommensurabiles insuper intelliguntur, quarum quadrata per superficiem communē commensurabilia. Quæ quadrata in 47. I. appellātur potentia laterum vel linearum. Tales lineæ etiam sunt omnes longitudine commensurabiles non contra.

4. Incommensurabiles autem potentia, cum quadratis earum nulum spacium quod sit communis illorum mensura, contingit reperiri. Intelligit eas, quæ neq̃ mensuram communem, quoad longitudinem, neq̃ quoad quadrata habent.

5. His positis, ostenditur, cuicumque

que recte propositæ rectas lineas
 multitudine infinitas & commensu-
 rabiles esse, & incommensurabiles,
 alias quidem longitudine & poten-
 tia; alias verò potentia solum. Voc-
 tur autem proposita recta linea, Ra-
 tionalis. *Dicit ad datam rectam alias*
infinitas & commensurabiles tum longi-
tudine, tum potentia, & incommensura-
biles posse inveniri, eamq; cuius respectu
reliqui tales sunt dici p^{ri}tv, Rationalem,
quod semper ponatur certa & nota, reli-
quis ut plurimum ignoratis.

6. Et huic commensurabiles sive
 longitudine & potentia, sive potētia
 tantum Rationales. Omnes lineæ quæ
 data quomodocunq; sunt commensurabi-
 les dicuntur Rationales, non quidem posi-
 tione, ut illa, sed quia in illa comparatio-
 one cum data commensurabiles invenio-
 untur. Ideoq; & lineas quarum quadrata
 20 & 1000 sunt cuilibet quadrato, ut 16
 vel 100. commensurabiles, rectæ etiam ra-
 tionales appellamus.

7. Huic verò incommensurabiles,
 S s Irratio-

Irrationales vocentur. Itidem hîc ex
adverso omnibus modis incommensurabi-
les ostendit, quas nec in longitudine neq;
in potestate exactus aliquis numerus ex-
primit.

8. Et Quadratum, quod à proposita
dicta recta fit, dicatur Rationale.
Nonsecus enim; ac linea illa certa & nota
dicebatur rationalis, etiam quadratum
ex ea factum Rationale est dicendum.

9. Et huic commensurabilia qui-
dem, Rationalia. Ita & omnes superfi-
cies planæ, Quadrato Rationalis lineæ
propositæ commensurabiles, Rationales
sunt dicendæ non positione sed collatione.

10. Huic verò incommensurabilia,
Irrationalia dicantur. Etiam superfi-
cies quæcunq; irrationales dicuntur, qua-
rum lineæ sunt incommensurabiles ra-
tionali lineæ.

11. Et rectæ, quæ ipsa possunt, irra-
tionales. Si nimirum sunt quadrata
ipsa, intelliguntur hic latera per lineas;
si verò sint alia quæpiam recti lineæ, re-
ctæ

Et æ, describentes equalia quadrata spacijs incommensurabilibus.

POSTULATUM.

Quælibet magnitudo toties potest multiplicari, donec quamlibet magnitudinem ejusdem generis excedat.

AXIOMATA.

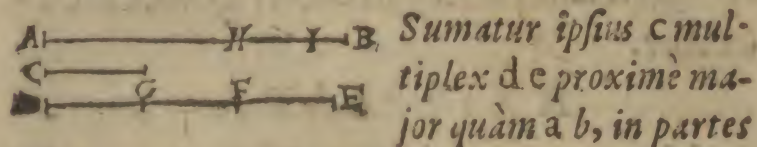
1. Magnitudo quotcunq; magnitudines metiens, compositam quoque ex ipsis metitur.
2. Magnitudo quamcunq; magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem, quam illa metitur.
3. Magnitudo metiens magnitudinem totam & ablatam, metitur & reliquam.

PROPOSITIO I.

Theorema 1.

Duabus magnitudinibus *ab*, *c*, inæqualib. propositis, si à majore *ab* auferatur majus *a* *b* quàm dimidiū; & ab eo, quod

quod reliquū hb est, rursus detraha-
tur majus hi , quā dimidium; & hoc
semper fiat: Relinquetur tandem
quædam magnitudo, ib , quæ minor
erit proposita minore magnitudi-
ne. c .



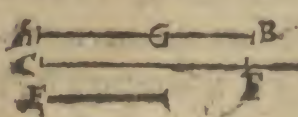
ipsi c æquales divisa; quibus partibus multitudine
æquales sint partes ah , hi , ib , in linea ab . Cum
ergo de sit major quā ab , & ex de minus di-
midio dg (vel etiam dimidium, si de esset du-
pla ipsius) ex ab verò plus dimidio ah sit ablatum,
erit reliquum ge reliquo hb majus. Rursus, cum
 hb , quam ge sit minor; & ex ge ablatum sit di-
midium fg (vel minus dimidio) ex hb verò majus
dimidio hi erit reliquum fe id est c reliquo ib
majus. Quod erat propositum.

PROPOS: II.

Theorema 2.

Si duabus magnitudinibus ab ,
 cd inæqualibus propositis, detraha-
tur semper minor ab de maiore cd ,
alterna quadam detractiōe, &
reliqua

reliqua fd minimè præcedentem ab
metiatur: incommensurabiles erunt
ipsæ magnitudines ab, cd .



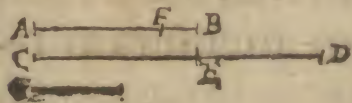
Sin minus, esto cōmunis
mensor e , qui vel aqua-
lis est ipsi ab vel minor.

Facta ergò detractiōe ab ex cd quoties potest,
relinquat fd se minorem, & detracta fd ex ab ax. 1.
relinquat se minorem gb & c. adeoq; relinque-
tur tandem vel ex cd vel ab quedam ut gb mi-
nor ipsa e : Quoniam itaq; e metitur ipsam ab , &
 ab ipsam cf , etiā e metietur ipsam cf , cumq;
 e metiatur etiā cd , y metietur totam etiā re- ax. 2.
liquam fd . Sed fd metitur ipsam ag y ergò & y ax. 3.
 e metitur ipsam ag , cumq; e metiatur ab , y me-
tietur etiā reliquam gb , major minorem.
Quod absurdum.

PROPOSITIO III.

Problema 1.

Duabus ab, cd magnitudinibus
commensurabilibus datis; maxi-
mam earum communem mensu-
ram fb invenire.



Facta detractiōe alter-
na, metietur tandem
 fb ipsam ed , nisi datas
duas

a 2. X.

β 1. ax.

γ. 1. ax.

δ 3. ax.

duas a, b, c, d & voluerimus esse incommensurabiles,
 eritq; f, b maxima communis mensura. Cum enim
 f, b metiatur e, d , e, d verò ipsam a, f , etiam f, b
 metietur f, a , & quia metitur seipsam, & etiam
 totam a, b ; & ita etiam ipsam c, e quam meti-
 tur a, b ; adeoq; cum c, e & e, d metiatur f, b , &
 metiatur totum c, d , eritq; utriusq; a, b & c, d
 mensura communis. Si quis verò etiam neget eam
 esse maximam, major sit g , quæ & a, b & c, d me-
 tietur, & f ipsam c, e , quam metitur, a, b ; Cumq;
 metietur & c, d & c, e , etiam d metietur e, d reli-
 quam; quæ cum metiatur a, f , eandem a, f, b me-
 tietur etiam g : sed cum & a, b & a, f metiatur
 d metietur etiam f, b reliquam, major minorem.
 Quod absurdum.

Hinc patet Corollarium.

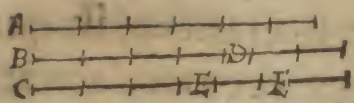
Magnitudo metiens duas ma-
 gnitudines, metitur & maximam
 earum mensuram communem.

PROPOSITIO IV.

Problema 2.

Tribus magnitudinibus a, b, c ,
 commensurabilibus datis, maximam
 earum communem mensuram in-
 venire.

Esto



Esto d communis men-
 sura a & b ; quæ si &
 metitur c , & habetur β cor. 3. X.

propositum. Si enim major quædam quàm d etiam communis mensura, β metietur & d communem mensuram in a & b major minorem. Si autem d non metiatur c , erunt saltem commensurabiles: Cum enim a , b , c sint commensurabiles, qualibet earum communis mensura, maximam mensuram d ipsarum a & b β metietur. Sit itaq; communis e inter c & d quæ erit maxima trium a , b , c communis mensura. Sin minus, major quàm e sit f . Quia ergò f metitur a & b , metietur etiam d . Cumq; metiatur etiam c & d , β metietur communem earum mensuram. e , major minorem. Quod absurdum.

Hinc manifesta sunt Corollaria.

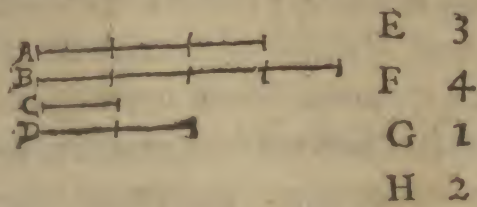
1. Magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoq; maximam earum communem mensuram.
2. Pluribus quam tribus magnitudinibus datis, illarum communis maxima mensura inveniri potest. Si enim sunt 4, invenitur prius trium.

LEMMA.

Si sint quotcūq; magnitudines, a, b, c, d , & totidē etiā numeri, e, f, g, h , qui bini in

EVCLIDIS ELEM.

in eadem ratione sumantur, in qua
binæ magnitudines; & ex æqualitate
in eadem ratione erunt, *A* ad *D* ma-
gnitudines & numeri *e* ad *h*.

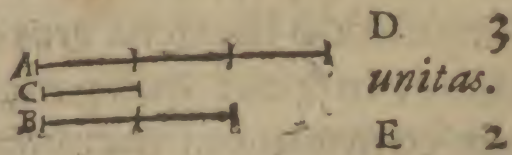


Demonstratio est ex V. & VII. manifesta.

PROPOS: V.

Theorema 3.

Commensurabiles *a* *b* magnitu-
dines inter se rationem habent,
quam numerus ad numerum.



3. X. Sit *c* earum mensura communis maxima, quæ
quoties metitur *a* & *b*, toties unitas metiatur
d & *e* numeros. Cum igitur magnitudo *c* metia-
tur magnitudinem *a* quoties unitas numerum *d*,
erit ut *c* ad *a* ita unitas ad *d*: sed ut est *c*
¶ Lema. X. ad *b* ita est unitas ad *e*, Ergo ex æquo ut magni-
tudo *a* ad magnitudinem *b* ita numerus *d* ad
numerus *e*.

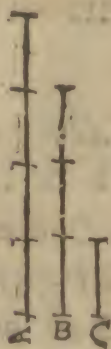
PRO-

PROPOSITIO VI.

Theorema 4.

Si duæ magnitudines a, b , proportionem habeant; quam numerus d ad numerum e ; commensurabiles erunt a, b , magnitudines.

D 4 E 3 unitas.



Quot unitates sunt in d , in tot partes æquales ipsi c sit divisa a magnitudo. Cum ergo sit ut c ad a ita unitas ad d , quia æquè metiuntur c ipsam a & unitas ipsum d ; cumq; ponatur ut a ad b , ita d ad e , & erit ex æquo ut c ad b ita unitas ad e . Sed unitas metitur numerum e . Igitur & c metitur

Lemma
4. X.

magnitudinem b . Sed & c metitur ipsum a . Ergo a & b eandem communem mensuram c habent, & β 1. def. X. β sunt commensurabiles.

Corollarium.

Si fuerint duo numeri & recta, dari potest alia recta, ad quam prior recta rationem habeat, quam numerus ad numerum. Si enim data, recta secetur in tot partes æquales, quot

T

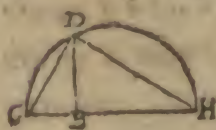
unita-

unitates continet alteruter numero-
rum; assumaturq; earundem parti-
um alia, quot unitates continet alter
numerus habetur propositum.

LEMMA.

Duobus numeris datis c & e , & li-
nea recta hb , oportet efficere ut nu-
merus c ad numerum e , sic quadratum
lineæ hb datæ ad quadratum alte-
rius bd .

α 13. VI.



Reperiatur bg , quæ sit ad hb ut
 c ad e : & sitq; inter hb & bg
media proportionalis bd . Cum er-

β. 20. VI.

C 5. E 2. g ò sit ut c ad e , ita hb ad bg ; sed
ut hb ad bg , & ita quadratum ex hb ad qua-
dratum ex bd . Itaq; ut c ad e , ita quadratum
ex hb ad quadratum ex bd .

PROPOS: VII.

Theorema 5.

Incommensurabiles magnitudi-
dines a, b inter se proportionem non
habent, quam numerus ad nume-
rum.

α 6. X.

Si haberent & essent commensurabiles. Quod est
contra hypotesin.

PRO-

LIBER X.
PROPOS: II X.

291

Theorema 6.

Si duæ magnitudines ab proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommensurabiles erunt magnitudines. (*longitud. scil.*) = 5. X.

Si enim commensurabiles acciperentur, æ esset earum proportio, quæ numeri ad numerum, contra hypothesein.



LEMMA.

Si sint tres quantitates a, b, c , continuè proportionales, & aliæ tres d, e, f continuè quoque proportionales; sitq; ut prima illarum a , ad tertiam c , ita prima d harum ad tertiam f ; erit & ut prima a illarum ad secundam b ; ita prima harum ad secundam e .

D 29 E 42 F 36



Cum enim rationes a ad c & d ad f duplicata sint eadem, etiam dimidia a ad b , & d ad e eadem erunt.

PROPOS: IX.

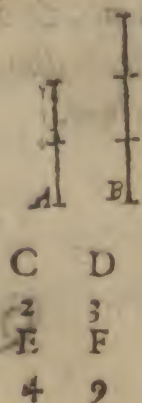
Theorema 7.

T 2

Quæ

Quæ à rectis lineis a, b , longitudine commensurabilibus fiunt quadrata; inter se rationem habent, quam quadratus numerus e ad quadratum f numerum: Et quadrata ex a & b inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus e ad quadratum numerum f ; & latera a, b habebunt longitudine commensurabilia. Quæ verò à rectis lineis a, b longitudine commensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus e ad quadratum numerum f : & quadrata ex a & b inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus e ad quadratum numerum f ; neq; latera a & b habebunt longitudine commensurabilia.

5. X.



Cum rectæ a, b sint commensurabiles longit. a erunt ut numerus ad numerum. Sic autem a ad b ut c numerus ad numerum d , quarum quadrati sunt e & f . Quoniam ergo a ad b est ut c ad d ; quadratum autem ex a ad quadratum

dratum ex b β habet duplicatam rationē laterum
 γ sicut & numerus quadratus e ad numerum qua- β 20. VI.
 dratum f laterum c & d, erit eadem proportio
 quadratorum ex a & b, quæ est numerorum qua-
 dratorum e & f.

Deinde sit quadratum ex a ad quadra-
 tum ex b ut numerus quadratus e ad nu-
 merum quadratum f, erunt rectæ a &
 b longitudine commensurabiles. Cum
 enim rationes eadem quadratorū ex re-
 ctis a & b, & numerorum quadratorum e f β & γ
 sint duplicatæ suorum laterum a b & c, d, erit, γ 11. IIX.
 ut numerus a ad numerum d, ita recta a ad re-
 ctam b, & erunt β a, b, commensurabiles. β 6. X.

Tertiò sint a b incommensurabiles, etiam qua-
 drata ex ipsis non erunt ut numerus quadratus ad
 numerum quadratum; quia ita forent a, b, com-
 mensurabiles contra hypothesin. Deniq; quadra-
 tum ex a non habeat rationem ad quadratum ex
 b, quam numerus quadratus ad quadratum, e-
 runt etiam longitudine incommensurabiles a & b;
 si enim essent commensurabiles, etiam quadrata
 ex ipsis essent ut numerus quadratus, ad quadra-
 tum, contra hypothesin.

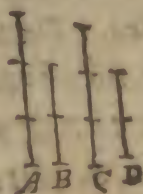
PROPOS: X.

Theorema 8.

Si quatuor a b c d magnitudines
 T 3 propor-

proportionales fuerint, prima a vero secunda b fuerit commensurabilis; & tertia c quartæ d commensurabilis erit. Et si prima a secunda b fuerit incommensurabilis, & tertia c , quartæ d incommensurabilis erit.

5. X.



6. X.

7. X.

EF

32

Cum enim a & b sint commensurabiles, a habebunt rationem numerorum, e ad f : Est vero etiam c ad d ut a ad b , ergo etiam c ad d est ut e ad f . Sunt ergo inter se commensurabiles. Contra si a & b sint incommensurabiles, etiam c non sunt ut numerus ad numerum. Ideoque nec c ad d , quæ ponuntur ut a ad b , erunt ut numerus ad numerum, adeoque etiam c & d incommensurabiles erunt.

LEMMA.

Duos numeros planos invenire, qui proportionem non habeant, quâ Quadratus numerus ad Quadratum numerum.

26. IIX.

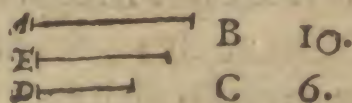
Inventi plani non similes, omnes non habent rationem quam quadratus ad quadratum. Sunt quæ
rales

tales numeri primi omnes, & quorum unus quadratus, alter non. &c.

PROPOSITIO XI.

Problema 3.

Propositæ rectæ lineæ *a* invenire, duas rectas lineas *d* & *e* incommensurabiles, alteram *d* quidem longitudine tantum, alteram *e* verò etiam potentia.



a Assumptis numeris *b* & *c*, si investigetur recta *d*, ad cuius quadratum sit quadratum rectæ *a*, ut *b* ad *c*, erit *d* ipsæ *a* longitudine tantum incommensurabilis. Quia enim quadratum ex *a* ad quadratum ex *d* est, ut numerus *b*, ad numerum *c*, sed *b* & *c* non sunt quadrati: Ergò quadratum ex *a* ad quadratum ex *d* non erit ut numerus quadratus ad numerum quadratum: & Ideoq; *a* & *d* sunt rectæ longitudine incommensurabiles; & longitudine quidem tantum Cum n. quadrata earum habeant proportionem numerorum *b* ad *c*, & erunt commensurabilia. Deinde inter rectas *a* & *d* longitudine tantum incommensurabiles

a per lemma 10. X.

b per lemma 6. X.

c 9. X.

d 6. X.

T. 4

inve-

13.VI.

inveniatur media proportionalis e, quæ & longi-
tudine & potentia incommensurabilis erit ipsi a.
Quia enim quadratum ex a, ad quadratum ex e
est, ut a ad d: sed a ipsi d est longitudine incom-
mensurabilis; & erit ergo quadratum ex a quadrato
ex e incommensurabile, & ita recta a e etiam po-
tentia incommensurabiles.

10.X.

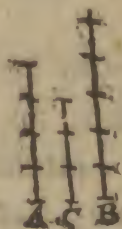
PROPOSITIO XII.

Theorema 9.

Quæ a, b, eidem c magnitudini sunt
commensurabiles, & inter se a & b
sunt commensurabiles.

5.X.

4.IIX.



D 10

E 8

F 2

G 3

H 5

I 4

K 6

Cum enim a, c sint commensurabiles,
a habent rationum numerorū d, e,
sicut & c b numerorum f, g. β Assum-
tis autē h, i, k, tribus numeris minimis
in rationibus datis d ad e, & f ad g;
erit h ad i, ut d ad e, id est, a ad c;
& i ad k, ut f ad g, id est c ad b. Ita
que ex æquo erit a ad b, ut h ad k.
id est, ut numerus ad numerum, & ita
commensurabiles.

6.X.

PROPOS: XIII.

Theorema 10.

Si

Si sint duæ magnitudines a b , & altera a quidem eidem c sit commensurabilis, altera b verò incommensurabilis: incommensurabiles erunt magnitudines a b .

Sin minus, & eidem a sit commensurabilis b , a 12. X. erunt etiam b & c commensurabiles, contra hypothesin.

PROPOSITIO XIV.

Theorema i. i.

Si sint duæ magnitudines commensurabiles, altera a autem ipsatum magnitudini cuiusdam c incommensurabilis fuerit: & reliqua b eidem c incommensurabilis erit.



Sin minus, cum a ipsi b sit commensurabilis, a 12. X. erunt etiam a & c commensurabiles, contra hypothesin.

Scholium.

Quæ incommensurabilibus sunt commensurabiles; & inter se incommensurabiles erunt.

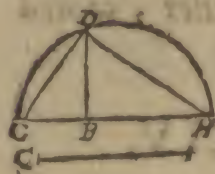
T 5

LEM-

LEMMA.

Duabus datis rectis inæqualibus $h g$ & c ; invenire id, quo major $h g$ plus potest quàm minor c .

al. IV.



31. III.

47. I.

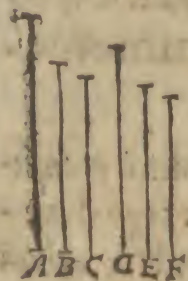
Descripto semicirculo super $h g$ aptetur $h d$ æqualis ipsi c , junctis $d g$; plus poterit recta $h g$ quàm $h d$ vel c quadrato rectæ $d g$. Cum enim $h d g$ angulus β sit rectus erit quadratum ex $h g$ æquale, quadratis ex $d h$. & $d g$. Atq; sit $h g$ recta plus potest quàm c quadrato $d g$.

PROPOSITIO XV.

Theorema 12.

Si quatuor a, b, d, e , rectæ lineæ proportionales fuerint, prima a verò tantò plus possit, quàm secunda b , quantum est Quadratum rectæ lineæ c , sibi commensurabilis longitudine: Et tertia d tantò plus poterit, quàm quarta e , quantum est quadratum rectæ f , lineæ sibi cōmensurabilis longitudine: Quod si prima a tanto plus pos-

possit quàm secunda b , quantum est quadratum rectæ lineæ f sibi incommensurabilis longitudine: Et tertia d tantò plus poterit, quàm quarta e , quantum est quadratum rectæ lineæ f sibi longitudine incommensurabilis.



Cum sit ut a ad b , ita d ad e ,
 erunt etiam ex illis rectis descrita quadrata ut rectæ; sed quadratum ex a est β æquale quadratis ^{a 22. VI.}
 ex b c . & quadratum ex β ex hypod quadratis ex e , f . Ergò erit thesi.

ut quadrata ex b , c ad quadratum ex b ; ita quadrata ex e , f , ad quadratum ex e : Et dividendo, ut quadratum ex c ad quadratum ex b ; ita quadratum ex f ad quadratum ex e . Ergò ut recta c ad rectam b ; ita recta f ad rectam e . Et convertendo ut b ad c , ita e ad f . Cum autem sit ut a ad b , ita d ad e , & ut b ad c , ita e ad f , erit etiam ex æquo, ut a ad c , ita d ad f . ^{y 10. X.} Quare a si fuerit longitudine commensurabilis ipsi c , etiam d ipsi f commensurabilis longitudine erit, & si incommensurabilis, incommensurabilis.

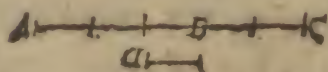
PRO-

EVCLIDIS ELEM:
PROPOS: XVI.

Theorema 13.

Si duæ magnitudines ab , bc com-
mensurabiles componantur; & tota
magnitudo ac utriq; ipsarum com-
mensurabilis erit. Quod si tota ma-
gnitudo ac , uni ab ipsarū com-
mensurabilis fuerit; & quæ à principio
magnitudines ab & bc commensu-
rabiles erunt.

¶ 3. X.



¶ 3. XX.

¶ Sit communis mensu-
ra d . Cum ergò d me-
tiatur a , b , c , etiam

ac tota d metietur, eruntq; ac & ab commensu-
rabiles propter communem mensuram d ; sicut &
 ac & bc ; eaq; propter utriq; ab & bc com-
mensurabilis est ac . Deinde sit tota ac alteri; ex
quibus cõposita est ut ab commensurabilis, erunt
 ab & bc commensurabiles. Assumpta enim com-
muni mensura d , erit eadem d reliquæ bc men-
sura. Ideoq; commensurabiles sunt ab , bc propter
communem mensuram d .

Corollarium

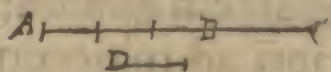
Si tota magnitudo ac ex duabus
 ab , bc , composita, commensurabilis
fuerit

fuerit alteri ab ipsarum, eadem ac & reliquæ bc commensurabilis erit.

PROPOS. XVII.

Theorema 14.

Si duæ magnitudines ab , bc incommensurabiles componantur, & tota magnitudo ac utriq; ab , & bc ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo ac uni ipsarum ab incommensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudinem ab , & bc incommensurabiles erunt.



Si non utriq; tantum alteri, ut ab , sit commensurabilis, habens

mensuram communem. Itaq; d metiens totam ac , & ablatam ab , etiam metietur reliquam a 3. 17. bc , & commensurabiles erunt ab , bc , contra hypothefin. Deinde tota ac uni ipsarum ab incommensurabilis existens, etiam alteri bc incommensurabilis erit. Si non, etiam contra hypothefin ipsi ab commensurabilis foret.

316. X.

Corollarium.

Si tota magnitudo ex duabus compo-

composita, incommensurabilis sit alteri illarum, eadem & reliquæ incommensurabilis est.

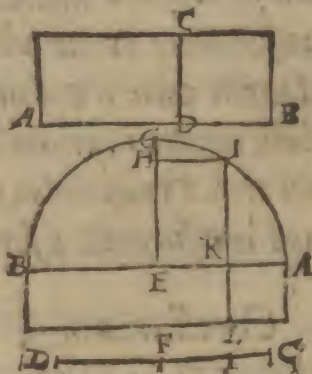
LEMMA 1.

Si ad aliquam rectam ab applicetur parallelogrammum ac , deficiens quadrata figura bc ; parallelogrammum ac applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis ad , db , vel dc , rectæ ab , ex applicatione factis continetur.

Quod patet ex 28. VI.

LEMMA 2.

Duabus datis rectis ab , cd , inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore cd descripti ad maiorem ab applicare, ita ut deficiat figura quadrata la .



Super

Super ab describatur quadratus, sitq; e gradus ad b perpendicularis. Secta cd bisariam in f , sumatur eh equalis cf rectae; & h puncto agatur hi parallela ipsi ae , & i puncto ikl parallela ipsi ge , sumtaque kl equali ipsi ak , perficiatur lb rectangulum, & la quadratum. Dico lb rectangulum quarta parti quadrati ex cd esse aequale, applicatum ad rectam ab , deficiens figura quadrata la . Quoniam ki media proportionalis est inter ak , kb erit re-
13. VL
 ctangulum akb quadrato ki aequale, id est, 34. I.
 quadrato ex peh vel cf , & quod quarta pars 4. II.
 est quadrati ex cd .

LEMMA 3.

Si sint duae rectae ab, cd , inaequales, & ad maiorem ab applicetur quarta pars lb Quadrati, ex minore cd descripti, deficiens figura quadrata la , non erunt segmenta ak, kb , quae ex applicatione sunt, aequalia.

Si aequalia sunt segmenta ak, kb aequi-
 dem parallelogrammum applicatū ad ab defici-
 ens figura quadrata ex ak descripta, aequale est
 rectangulo akb : Est verò sub aequalibus
 ak, kb quadratum: erit parallelogrammum
 dictum
per Lem-
 ma 17. X.

dictum quadratum ex $b k$, dimidio ipsius $a b$ descriptum, & quadratum ex $a b$ quadruplum ipsius parallelogrammi. Cum autem ex hypothesis quadratum ex $c d$ ejusdem parallelogrammi applicati sit quadruplum, nempe quartæ partis quadrati ex $c d$. Igitur quadrata rectarum $a b$, $c d$ sunt æqualia, ipsæq; rectæ contra hypothesis æquales.

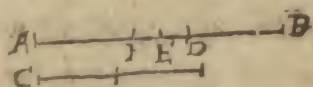
PROPOSITIO XIIX.

Theorema 15.

Si fuerint duæ rectæ lineæ $a b$ & c inæquales, quartæ autem parti Quadrati, quod fit à minori c æquale parallelogrammum ad majorem $a b$ applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes $a b$, $d b$ longitudine commensurabiles ipsam dividat; major $a b$ tantò plus poterit, quàm minor c , quantum est quadratum rectæ lineæ $f d$ sibi longitudine commensurabilis. Quod si major $a b$ tantò plus possit, quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ $f d$ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati,

22 Lem.
17 X.

drati, quod fit à minori e , æquale parallelogrammum ad maiorem a applicetur, deficiens figura quadrata; in partes $a d$, $d b$ longitudine commensurabiles ipsam dividet.



Quoniam enim $a d$ β major est quàm $d b$, secetur $a b$ bisariam in e ipsiusq; $e d$ sumatur æqualis $e f$. Cū autē tota $a c$ & $e b$, ablatæq; $e d$ & $e f$ sint æquales erunt & reliquæ $a f$, $d b$ æquales. Cumq; recta $a b$ in æqualia in e itemq; in æqualia in d , sit secta, & erit rect. angulum super $a d b$ unà cum quadrato $e d$ æquale quadrato ex $e b$: & quadruplum rect. anguli $a d b$ & quadrati ex $e d$ æquale erit quadruplo quadrati ex $e b$. Sed quadruplo rect. anguli $a d b$ æquale est quadratum ex c : & quadruplo quadrati ex $e d$ æquale est quadratum ex $f d$ (cum quarta pars quadrati ex tota aliqua recta descripti æqualis sit quadrato ex totius recte dimidio descripto) & quadruplo quadrati ex $e b$ æquale est quadratum ex $a b$. Quadrata igitur ex c & $f d$ simul æqualia sunt quadrato ex $a b$; recta q; $a d$ plus potest recta c quadrato recte $a f d$. Hæc dico commensurabilem toti $a b$. Cum enim $a d$, $d b$ sint commensurabiles & erit tota $a b$ parti $d b$ commensurabilis longitudine: cum item ipsi $d b$ composita ex

V $d b$ &

12 X. db & a f sit longitudine commensurabili (quæ du-
 pla est ipsius db) Ergò cum utraq; a b & compo-
 sita ex db , a f longitudine sit commensurabili
 ipsi db , erunt etiam a b & composita ex db , a
 longitudine inter se commensurabiles: adeoq; cum
 a b composita ex a f , db tanquam una recta &
 2 cor. 16. X. fd commensurabilis sit longitudine composita ex
 a f , db , eadem a b reliqua fd longitudine com-
 mensurabilis erit ζ . Ergò a b plus potest quàm
 c quadrato rectæ fd longitudine sibi commensura-
 bilis.

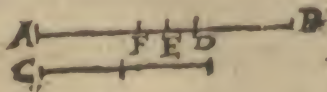
Contra si a b plus potest quàm c quadrato
 rectæ sibi longitudine commensurabilis & c , erunt
 segmenta a b , db commensurabilia. Eodem ni-
 mirum modo ostenditur ab plus posse quàm c qua-
 drato rectæ fd , longitudine sibi commensurabilis.
 Cum autē a b tota composita ex fd , a f & db tan-
 quam una sit longitudine cōmensurabilis ipsi fd ,
 eadem cōmensurabilis ζ erit reliqua ex af , db com-
 posita. Est verò & a f , db , composita seu dupla cō-
 mensurabilis ipsi db . Itaq; cum utraq; a d & db
 cōposita ex a f , db longitudine sit cōmensurabilis,
 erunt etiam a b , db longitudine commensurabi-
 les: adeoq; cum tota a b ex a d , db composita
 ipsi db sit commensurabilis longitudine, ipsæ a d ,
 db etiam inter se commensurabiles & erunt longi-
 tudine.

PROPOSITIO XIX.

Theorema 16.

Si

Si fuerint duæ rectæ linæ ab , & c inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore c , æquale parallelogrammum ad maiorem ab applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine ipsam dividat; maior ab tantò plus poterit quam minore, quantum est quadratum rectæ linæ fd sibi longitudine incommensurabilis. Quod si maior ab tantò plus possit, quam minor c , quantum est quadratum rectæ linæ fd sibi longitudine incommensurabilis; quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore c , æquale parallelogrammum ad maiorem ab applicetur, deficiens figura quadrata; in partes ad , db longitudine incommensurabiles ipsam dividet.



Omnia constituentur ut in precedenti propositione, nisi ut ad , db fiant incommensurabiles longitudine. Quod cum ita sit, erit etiam tota ab parti db longitudine incommensurabilis. Sed db est commensurabilis suæ duplæ ex db , ac cõpositæ.

V 2

Igitur

17. X.

§ 14. X.

Igitur cum duarum commensurabilium, d & b composita ex d , b , a , f , una d & b incommensurabilis sit ipsi a , b , etiam reliqua ex d , b , a , f composita eadem a & b incommensurabilis β erit: adeoque cum a & b ex a , f , d & b composita sit incommensurabilis longitudine composita ex a , f , d , b ; erit eadem a & b etiam reliqua f , d incommensurabilis, atque sic a & b plus potest quam c , quadrato recta f , d , longitudine sibi incommensurabilis.

Contra in partes a , d , d & b incommensurabiles divisa ostenditur linea a , b . Iisdem enim, ut prius retentis, erit a & b ipsi f , d incommensurabilis. Itaque cum tota, a , b , ex f , d , a , f , d & b composita, ipsi f , d longitudine sit incommensurabilis, eadem etiam a & b reliqua ex a , f & d & b composita incommensurabilis erit. Sed una recta ex a , f & d & b ipsi d , b longitudine est commensurabilis, utpote dupla. Duarum itaque commensurabilium, composita ex a , f , d & b & d , b ; ipsa composita ex a , f , d & b incommensurabili ipsi a , b , β erit etiam reliqua d & b eadem a & b incommensurabilis. Cum itaque tota a , b , composita ex a , d , d & b longitudine incommensurabilis sit ipsi d , b , erunt & ipsae a , d , d & b inter se incommensurabiles.

Haecenus actum est de commensurabili & incommensurabili. Nunc transcendendum est ad Rationales & Medias.

LEMMA I.

Quoniam demonstratum est, lineas

neas longitudine commensurabiles, omninò & potentia commensurabiles esse, potentia verò commensurabiles non omninò & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse & incommensurabiles; manifestum est, si expositæ Rationali aliqua linea commensurabilis fuerit longitudine, illam vocari Rationalem, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed etiam potentia: longitudine enim commensurabiles, omninò & potentia commensurabiles sunt. Si verò expositæ Rationali aliqua linea fuerit potentia commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic, Rationalis & commensurabilis ipsi longitudine & potentia. Quod si expositæ Rationali rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic Rationalis, potentia tantum ipsi commensurabilis.

EVCLIDIS ELEM:
 LEMMA II. EX
 PROCLO.

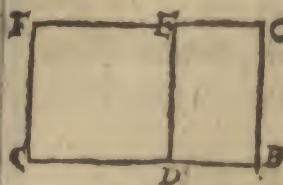
Rationales vocat eas lineas, quæ
 expositæ Rationali vel longitudine
 & potentia commensurabiles sunt,
 vel potentia solum. Sunt autem &
 aliæ lineæ, quæ longitudine quidem
 expositæ Rationali incommensura-
 biles sunt, potentia autem solum
 commensurabiles; atq; ob id rursus
 dicuntur Rationales & commensura-
 biles inter se, quatenus Rationales;
 cōmensurabiles, inquam, inter se, vel
 longitudine & potentia vel potentiâ
 solum: Et si quidē longitudine, dicū-
 tur & ipsæ Rationales lōgitudine in-
 ter se cōmensurabiles, ut intelliga-
 tur, etiā potentia commensurabiles
 esse; si verò potentia inter se solum
 sunt cōmensurabiles: dicuntur ipsæ
 quoque Rationales; potentia solum
 inter se commensurabiles.

LEMMA 3.

Si sint duæ rectæ lineæ, cd , bd , erit,
 ut prima cd ad secundam db : ita qua-
 dratum df , quod fit à prima cd , ad re-
 ctangu

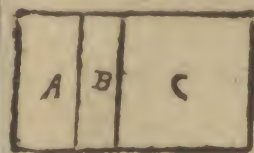
Rectangulum dg , quod sub duabus illis
rectis lineis continetur; & ut secunda
 db ad primam bc ; ita rectangulum
 dg sub ipsis, ad quadratum ce ex prima.

Cum enim rectangula ce , & dg sint aequalia, & sunt ut latitudines.



LEMMA 4.

Spacium a Rationali spacio b commensurabile & a ipsum Rationale est.



Sit enim c quadratum rationale. Cum ergo b sit rationale, & erit Rationali c commensurabile: & 9 def. X. Cumq; a ipsi b sit commensurabile, etiam a & c tanquam commensurabilia ipsi b , inter se commensurabilia erunt, & sic etiam Rationali c commensurabile a , ipsum quoq; rationale erit. & 12. X.

PROPOSITIO XX.

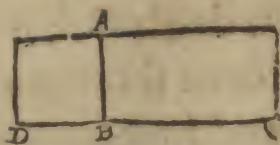
Theorema 17.

Quod sub Rationalibus, longitudine commensurabilibus, rectis lineis a, b, c , secundum aliquem praedictorum modorum, (in lemmate secundo propositorum, ut longit.) continetur Rectangulum, ac , rationale est.

F 4

Super

29. def.
 1. VI.
 10. X.



Super alterutra illarum, ut
 ab fiat quadratum ad ra-
 tionale. Quia autem ab , id
 est, bd , & bc rationales
 commensurabiles sunt longitudine, & est, ut db
 ad bc , ita ad ad ac , erunt etiam ad & ac com-
 mensurabilia, atq; ad rationali, commensura-
 bile ac etiam & rationale.

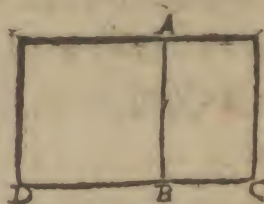
PROPOS: XXI.

Theorema 18.

Si Rationale ac ad Rationalem ab
 applicetur, latitudinē bc efficit Rati-
 onalem, & $ciab$, ad quam applica-
 rum est, longitudine commensura-
 bilem.

12. X.

1. VI.



Ex ab fiat quadratum,
 quod est rationale, erunt ad ,
 ac rationalia; adeoq; ac com-
 mensurabilia. Sed & ut ad ad
 ac , ita est db , id est, ab

& 6. def. X. Rationalis ad bc & rationalem.

LEMMA I.

Recta linea potens spacium irra-
 tionale, irrationalis est.

Si enim

Si enim lineæ illius quadratum aequale sit spacio
 irrationali, ipsum irrationale esse oportet, aut
 quadratum illud foret contra hypothesin rationale
 & propter ipsam lineam rationalem.

LEMMA 2.

Duas rectas *bc* Rationales potentia
 solum commensurabiles invenire.

He, ut & rationa-
 les longitudine commensu-
 rabiles, duplices tantum
 sunt; Aut enim illarum
 una, ut *b*, longitudine est
 commensurabilis datæ *a*,
 & tunc ipsi *a* æquali assum-
 ta *b* rationali *a* invenia-
 tur potentia tantum commensurabilis, vel longitudi-
 ne tantum incommensurabilis, quæ & ipsa *β* ratio-
 nalis est: Aut neutra illarum longitudine ipsi *a*
 est commensurabilis, & tum illi primum *b*, & hu-
 ius *c* *a* inveniatur potentia commensurabilis. Erunt
 ergo rationali *a* potentia commensurabiles *γ b* &
δ c, ipsæ quoque *β* rationales.

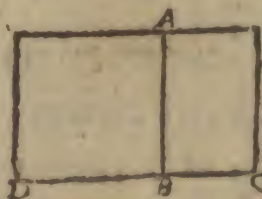
PROPOSITIO XXII.

Theorema 19.

Quod sub Rationalibus *ab, bc* po-
 tentia tantum commensurabilibus

V s rectis

rectis lineis cōtinetur rectangulum
 ac ; Irrationale est: & recta linea i-
 psum potens, rationalis est. Vocetur
 autem Media.



¶ 1. VI.
 p. 10. X.

¶ 10. def. X

¶ per Lem-
 ma 1. 21. X.

¶ 17. VI.

Ex altera, ut ab , descri-
 ptum sit quadratum ad , quod
 rationale est. Quoniam verò
 a est ut b d , id est, ab ad bc ;
 ita a ad a c ; & a b , b c

sunt longitudine incommensurabiles; & erunt &
 ad , ac incommensurabilia; cumq; quadratum
 ad sit rationale, & irrationale erit ac rectangulū,
 & ipsi æquale quadratum describens linea d irra-
 tionalis. Hæc autem linea cum inter ab & bc sit
 media proportionalis, vocatur Media, & rectan-
 gulum dicitur medium, quod vel sub duabus poten-
 tia tantum commensurabilibus continetur, ut a c :
 vel quod alteri cuipiam, sub talibus lineis compre-
 benso, æquale est, quia æquale est quadrato su-
 per media proportionali descripto.

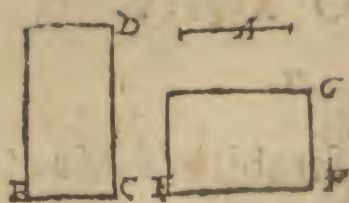
PROPOSITIO XXIII.

Theorema 20.

¶ 45. I.

Quod à Media a fit, ad Rationa-
 lem bc applicatum, latitudinem ef-
 ficat Rationalem cd , & ei bc , ad quam
 applicatum est, longitudine in-
 commensurabilem.

Quoniam



Quoniam a est Me-
dia, potest rectang. eg
duabus rationalibus ef ,
 fg potentia tantum
incommensurabilibus con-
tentum, & rectangu-
la bd , eg sunt equalia, § 14. VI.

laterum & reciproce proportionalium, ut bc ad
 ef ; ita fg ad cd . & Et ut quadratum ex bc , ad § 11. VI.
quadratum ex ef , quae super rationalibus lineis
sunt commensurabilia; ita quadratum ex fg , ad
quadratum ex cd inter se commensurabilia, ipseque
recta fg & cd & commensurabiles; & cum fg § 10. X.
sit rationalis, utraq; etiam Rationalis erit. Sed
 cd ipsi bc est incommensurabilis. Cum enim ef ,
 fg sint rationales potentia tantum commensura-
biles; sitq;, ut ef ad fg , ita quadratum ex ef ,
ad rectang. eg , & erit quadratum ex ef rectan-
gulo eg incommensurabile, & sic rectangulo bd .
At quadratum ex ef commensurabile est quadrato
ex cd (quia lineae illae sunt rationales & potentia
tantum commensurabiles.) Itaq;, cum eidem qua-
drato ex ef rectangulum bd sit incommensurabi-
le, etiam bd rectang. & erit incommensurabile; § 13. X.
quadrato cd . Cum vero cd & bc sint ut quadra-
tum cd & rectang. bd incommensurabilia: &
erunt ipse quoque longitudine incommensurabiles.
Est ergo rationalis cd , & rationali bc poten-
tia tantum commensurabilis seu longitudine in-
commensurabilis.

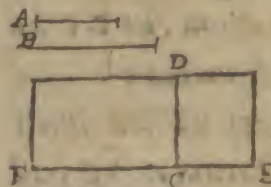
PRO-

EVCLIDIS ELEM:
PROPOSITIO XXIV.

Theorema 21.

Mediæ a commensurabilis, b , Media est.

45. I.
23. X.



1. VI.
10. X.

14. X.

22. X.

Sit d rationalis, ad quam
 a applicetur rectang. $d e$ æ-
quale quadrato ex a , β erit
 c rationalis ipsi $c d$ longitu-
dine incommensurabilis. Eidem
 $c d$ applicetur rectangulum $d f$ æquale quadrato
ex b . Cum ergo a, b sint commensurabiles; ipsa-
rum quadrata, id est, rectangula $d e, d f$ etiam
commensurabilia erunt. γ Est autem, ut $d e$ ad
 $d f$; ita recta $a e$ ad rectam $c f$, & $e c$, & $c f$ lon-
gitudine sunt commensurabiles. Sed $e c$ est ratio-
nalis, ipsi $c d$ potentia tantum commensurabilis:
Itaque & $c f$ eidem $c d$ longitudine incommensura-
bilis erit. Et quia rationalis est $c f$, cum rationa-
li $c d$ commensurabilis sit potentia, potentia etiam
commensurabiles erunt $c d, c f$. ζ Ac proinde b re-
cta potens rectangulum $d f$ sub rectis $c d, c f$ po-
tentia tantum commensurabilibus, media est.

Corollarium.

Spacium $d f$ Medio spacio $d e$
commensurabile, medium est.

Patebat.

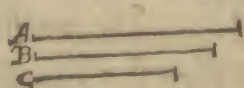
Patebat. quod utraq; continebantur rectis potentia tantum commensurabilibus.

LEMMA 1.

Congruit hoc omniquaq; cum lem-
mate 1, 19 propos. nisi quod loco Ra-
tionalis semper legendum est Me-
dium.

LEMMA. 2.

Duas rectas Medias ab longitu-
dine commensurabiles; item duas
 ac potentia tantum commensura-
biles invenire.



*Si b ipsa Mediae longitudine;
c vero eidem a potentia tantum
commensurabilis inveniatur,
utraq; etiam a erit Media, a b quidem longitudi-
ne, a c vero potentia tantum commensurabiles me-
diae.*

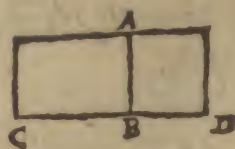
PROPOSITIO XXV.

Theorema 22.

Quod sub Mediis Longitudine
commensurabilibus rectis lineis ab ,
 bc continetur rectangulum ac , Me-
dium est.

Ex

VI.



Ex ab media fiat quadratū ad, quod erit Medium, cum a sit, ut db ad bc , ita ad ad ac : sunt autem db

10. X.
Cor.
24. X.

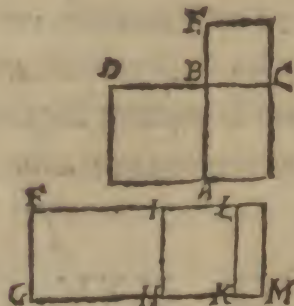
id est ab & bc longitudine commensurabiles. Itaque ad , ac erunt commensurabilia. & Quare spatium ac medio ad commensurabile Medium est.

PROPOS: XXVI.

Theorema 23.

Quod sub Mediis potentia tantum commensurabilibus rectis lineis ab , bc continetur rectangulum, ac , vel Rationale est, vel Medium.

22. X.
45. I.



Descriptio quadrati ex ab & bc & medijs ad Rationale fg & applicentur rectangula fh , hl , lm equalia spatijs ad , ac , ce , ut fm fiat rectangulum unum. Cum itaque ad & ce

23. X.
34. I.

sint media, etiam fh , lm erunt media, & eorumque latitudines gh , km rationales propter fg , kl & equales rationales, quibus sunt applicata, & potentia commensurabiles erunt. Cumque ab , bc sint potentia commensurabiles, etiam earum quadrata ad , ce , & his equalia rectangula fh , lm com-

commensurabilia erunt. Sed ut fh ad lm ita . 1. VI.
 recta gh ad km . \S Sunt igitur gh, km longi- 2 10. X.
 tudine inter se commensurabiles. Et quia ra- n 20. X.
 tionali fg potentia sunt commensurabiles; etiam
 rectangulum sub gh, km comprehensum, ratio-
 nale erit. Quia verò est, ut db ad bc ; ita ad
 ad ac : & ut ab ad be , ita ac ad ce ; erit ut
 ad ad ac , ita ac ad ce ; cum sit bd ad bc , ut
 ab ad be , quia utriq; utraq; equalis. Proinde
 & ipsis equalia rectangula fh, hl, lm erunt
 proportionalia. ut & ipsorum Bases $gh, hk,$
 km : & adeoq; rectangulum sub gh, km ratio- 3 17. VI.
 nale quadrato ex hk erit equale, quod & ipsum
 & ipsius latus hk rationale est; & ob id fg ra-
 tionali exposita longitudine vel potentia x com- x 6. def.
 mensurabilis est hk . Et si hk ipsi hi id est fg
 longitudine commensurabilis fuerit, & erit re-
 ctangulum hl rationale: Sed si tantum poten-
 tia & erit Medium. Est ergo rectangulum sub
 Medijs potentia tantum commensurabilibus vel
 Rationale vel Medium

Scholium.

Facilius quàm per 45. I. potest da-
 to ac rectangulo æquale fieri ad hl ra-
 tionalem datam, si tribus his & applice- a 12. VI.
 tur quarta proportionalis hk . Rectan-
 gulum enim sub extremis hi, hk β x 6 16. V.
 quale est rectangulo ac ex intermedijs.

Siqui.

y 20. X.

d 22. X.

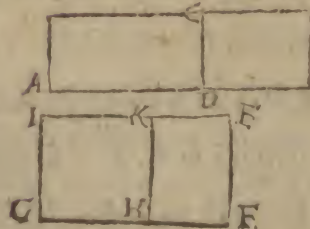
Siquidem verò rectangulum sub duabus medijs potentia tantum cōmensurabilibus vel rationale vel medium est, docetur propos. 28. quomodo inveniende sint illæ mediæ, quæ comprehendunt rationale; & 29; quæ Medium. Atq; sic ex hætenus demonstratis colligitur, 7 Rectangulum sub duabus Rationalibus longitudine cōmensurabilibus, Rationale esse, potentia verò Medium. Rursus d rectangulum sub medijs longitudine cōmensurabilibus esse Medium: Sub Medijs verò potentia tantum cōmensurabilibus vel Rationale vel Medium esse. (Sub Medijs verò nec potentiæ nec longitudine cōmensurabilibus, est Medio Medium, æquale rectangulo sub Rationali & Irrationali Mediæ; quàm speciem Euclides non habet.)

PROPOS: XXVII.

Theorema 24.

Medium ab non superat Medium
 ac Rationali. db

45. 1.



Si enim db est Rationale, posita e f lineæ rationali a applicetur cg medio a b æquale, & medio a c rectangulum eh æquale, critq; db rationa-

rationali aequale $k g$. Cum ergo Media $e g, e h$ ad
 rationalem $e f$ sint applicata β , erunt $f g, f h$ Ra- β 23. X.
 tionales incommensurabiles longitudine ipsi $e f$ ra-
 tionali. Cum item rationale $h i$ ad rationalem
 $h k$, id est, $e f$ sit applicatum, γ erit $h g$ rationa- γ 21. X.
 lis longitudine ipsi $e f$ commensurabilis. Sed $e f$ ipsi
 $f h$ longitudine est incommensurabilis. Ergo $h g$
 eidem $f h$ longitudine incommensurabilis δ erit. Ve- δ 14. X.
 rum ut $f h$ ad $h g$, ita quadratum ex $f h$, ad re- ϵ 3. Lemma
 ctangulum $f h g$. Itaque quadratum ex $f h$ incommen- ϵ 19. X.
 surabile ζ erit rectangulum $f h g$. Sed quadrato ζ 10. X.
 ex $f h$ commensurabile est quadratum ex $h g$
 (quia utraq; ex rationalibus lineis sunt descripta)
 adeoque duo quadrata ex $f h, h g$ simul commensu- η 16. X.
 rabilia sunt quadrato ex $f h$; Et rectangulum $f h g$
 commensurabile est bis sub $f h, h g$ sumto rectan-
 gulo (quia duplum) Itaque quadrata $f h, h g$ simul
 incommensurabilia θ erunt rectangulo bis sumto sub
 $f h, h g$. Quare θ compositum ex quadratis θ 17. X.
 rectarum $f h, h g$ Et ex bis sumto rectangulo
 $f h g$ incommensurabile est composito ex quadratis
 rectarum $f h, h g$. Sed quadratis $f h, h g$, una
 cum rectangulo $f h g$ bis sumto κ aequale est qua- κ 4. II.
 dratum $f g$. Ergo quadratum ex $f g$, com-
 posito ex quadratis rectarum $f h, h g$ incommen-
 surabile erit. Quod compos. cum sit λ ratio- λ 4. Lemma
 nale: etiam ipsi incommensurabile quadratum ex λ 19. X.
 $f g$ erit irrationale, Et sic etiam recta $f g$ irratio-
 nalis,

X

nalis,

nalis, contra hypothefin, quæ illum longitudine incommensurabilem ipfi ef ponebat.

Scholium.

Rationale eg superat Rationale eh , hg Rationali.

α . 9. def. X.

γ 12. X.

γ cor. 16. X.

δ 4. Lemma

19. X.

Quia enim eg , eh sunt rationalia, & erunt eadem commensurabilia quadrato rationalis exponente; & quare & inter se commensurabilia. Itaque cum totum eg ex eh , kg compositum, ipsi eh sit commensurabile; erit quoque, idem eg reliquo kg commensurabile. Sed eg est rationale. δ Ergo & kg Rationale erit.

PROPOSITIO XIIIX.

Problema 4.

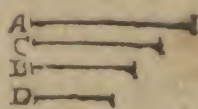
Medias cd invenire, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant.

α Lemma 2.

α 11. X.

β 13. VI.

γ 12. VI.



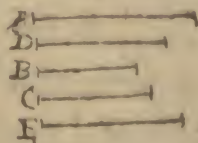
Inter α assumptas a , b rationales potentia tantum commensurabiles, β cadat media c , & γ fiat, ut a ad b , ita c ad d . Erunt c d mediae potentia tantum commensurabiles, quæ comprehendunt Rationale. Rectangulum sub a b rationalibus

libus potentia tantum commensurabilibus δ Medi- δ 22. X.
um est, & illud potens Media. Sed ut a ad b, ϵ 17. VI.
ita est c ad d: a & b sunt potentia tantum com-
mensurabiles. Ergo & c, d: & propter c Mediam ζ 10. X.
etiam d Media. Sunt itaq; inventæ c d me- η 24. X.
diæ potentia tantum commensurabiles; Quæ et-
iam Rationale continebunt. Cum enim sit ut a ad
b, ita c ad d; etiam permutando est, ut a ad
c, ita b ad d. Sed ut a ad c, ita c ad b. Ergo
ut c ad b, ita b ad d; ideoq; b media propor-
tionalis inter c & d, poterit rectangulum sub c d
comprehensum. Sed quadratum ex rationali
est rationale. Ergo & rectangulum sub c d, ratio-
nale est.

PROPOS: XXIX.

Problema 5.

Medias de invenire, potentia tan-
tum commensurabiles, quæ Medi-
um contineant.



Sumtis tribus potentia tantum commensura- α Lemma 1.
bilibus, interq; a, b β Media d γ fiat, ut b ad ζ 1. X.
X δ c, ita θ 13. VI.
 γ 12. VI.

D. 11. X.

a 17. VI.

§ 10. X.

a 24. X.

a 16. VI.

c, ita d ad e. Erunt d, e mediae potentia tantum commensurabiles continentes Medium. Cum a, b rationales potentia tantum commensurabiles sint ex illis rectangulum d erit medium, & illud : potens d media. Sed, quia, ut b ad c potentia tantum commens. ita d ad e & etiam potentia tantum commensurabiles sunt d & e, & Media d commensurabilis e media. Sic itaq; d, e mediae potentia tantum commensurabiles, sunt inventae; quae etiam continebunt Medium. Quia enim est, ut b ad c, ita d ad e; & permutando, ut b ad d, ita c ad e erit. Ut autem b ad d, ita d ad a; erit ergo d ad a ut c ad e. Itaq; rectangulum sub d, e, aequale est ei, quod sub a, c. Hoc autem sub rationalibus potentia solum commensurabilibus & Irrationale est & Medium. Ergo & rectangulum sub d, e.

Scholium, 1.

Duos numeros planos similes invenire.

A, 6. C, 12.

B, 4. D, 8.

E, 24. F, 96.

Assumptis quatuor quibuscumque numeris proportionalibus, ut a ad c, ita b ad d, ex a in b, ut & ex c in d facti numeri e & f sunt similes piani, quia constant lateribus proportionalibus, ut patet ex constructione.

LEM.

LIBER X.
 LEMMA I.

328

Duos numeros Quadratos invenire, ita, ut compositus ex ipsis Quadratus etiam sit.

A E D B

C

Inveniantur per Scholion præcedens duoplane similes ab & c , ambo pares vel impares. Cumq; sublato pari a pari vel impari ab impare semper remaneat par, ex a b sublato d b ipsi c equali re. liquus a d par erit. Quo diviso bisariam in e , dico factum ex a b in b d, (qui quidem β quadratus est) cum quadrato ex e d compositum, facere quadratum. Quia enim numerus a d bisariam sectus est in e , ipsiq; additus d b, γ erit qui sit ex ab in b d quadratus, una cum quadrato d e, α qualis numero quadrato ex e b.

a 24. &
 26. IX.
 3 1. IX.
 7 6. II.

Corollarium.

Quando a b & c sunt plani similes, quadrati ex e b & e d se excedunt quadrato ex a b in b d. Cum autem a b & c non sunt similes, sed tamen vel pares simul; quadrati e b & e d non excedunt se quadrato: Si enim excessus hic ex a b, b d factus esset quadratus,

X 3 tus,

2. IX. rus, essent ab & ca plani similes, contra hypoth.

Scholium 2.

Huic facile inveniuntur duo numeri quadrati, qui se excedunt quadrato, si sumantur duo plani similes vel pares vel impares, ut lemma præcedens jubebat; Itemq; alij duo quadrati, qui se non quadrato excedunt, si duo dissimiles sumuntur plani. Quod tamen facilimè fit secto numero quadrato in quadratum & non quadratum, ut 25, in 4, & 21.

LEMMA 2.

Duos Numeros quadratos invenire, ita, ut compositus ex ipsis non sit quadratus.

A . . H . . I . E . F . G . . D B

C

Sint plani similes ab & c , eademq; adhibita constructione ut in lemmate præcedente, auferatur ex d e unitas ef . Erit quadratus ex df minor quadrato ex de propter inæqualitatem laterũ. Dico quadratos ex ab in d b, & ex df in se cõpositos nã efficere quadratum. Si enim quadratus esset, esset quadrato b f vel major vel æqualis vel minor.

Primò

Primò. Si esset major, latus ipsius esset majus latere $b f$, essetq; ipsi $b e$ vel $a b$ equale vel majus, (quis minus esse nequit, cum inter $b f$ & $b e$ unitate tantum differentes non cadat medius) Si equale, ita, ut quadrato ex $b e$ equalis sit quadratus, compositus ex quadrato, factus ex $a b$ in $b d$ & ex quadrato $d f$, Cū eidem quadrato ex $b e$ ex precedente lemma equalis sit numerus factus ex $a b$ in $b d$ & ex $d e$ in se, erunt, factus ex $a b$ in $b d$ cū quadrato ex $d f$, & ex $a b$ in $b d$ cum quadrato ex $d e$ equales. Ablatoq; communi, qui ex $a b$ in $b d$ fit, erunt quadrati ex $d e$, & $d f$ equales. ipsaq; latera $d e$, totum & $d f$ pars equalia. Latus itaq; quadrati ex quadratis compositi, quorum alter ex $a b$ in $b d$, alter ex $f e$ in se fit, nequit esse equale numero $b e$. Neq; eodem est majus. Si tamen esset, ut equale $b i$. Cum quadratus ex latere majore, major sit quadrato ex $b e$ minore latere, etiam compositus ex quadratis, quorū alter ex $a b$ in $b d$, alter ex $d f$ in se fit, major quadrato ex $b e$, cui per lemma precedens equalis est numerus ex $a b$ in $b d$ cum quadrato ex $d e$. Itaq; ablato communi ex $a b$ in $b d$, erit reliquus quadratus ex $d f$ equalis reliquo quadrato ex $d e$ major, latuq; $d f$ latere $d e$ majus, pars toto. Cōpositi ergo ex quadratis $a b$ in $b d$ & ex $d f$ in se quadrati latus majus esse nequit latere $b e$: adeoq; ut ostensū, nec $a b$ equale, nec minus. Ideoq; quadrat. ille cōpositus nō est major quadrato ex $b e$.

X 4

Deinde

27. VII.

28. II.

218. VII.

Deinde ponatur quadratus ex $a b$ in $b d$ & $d f$ in se, equalis quadrato ex $b f$, & $a h$ sit duplus unitatis $e f$. Quoniam totus $a d$ totius $e d$ est duplus (quia $a d$ in e est bisariam sectus) & ablati $a h$ ablata unitatis $e f$; a erit & reliquus $h d$, reliqui $f d$ duplus & $h d$ in f bisariam sectus. Factus itaq; ex $h b$ in $b d$, una cum quadrato ex $d f$, equalis erit quadrato ex $b f$. Sed eidem equalis ponitur factus ex $a b$ in $a b d$ & quadrato ex $d f$. Itaq; ablato communi quadrato ex $d f$ relinquuntur ex $a b$, in $b d$ & ex $h b$ in $b d$ aequales. Atq; sic $a b$ & $h b$ eundem $b d$ multiplicantes, producentes numeros aequales, & erunt ipsi quoq; aequales, pars toti. Non ergo factus ex $a b$ in $b d$ cum quadrato ex $d f$ quadrato ex $b f$ equalis est.

Deniq; ponatur quadratus ex $a b$ in $b d$ cum quadrato $d f$ minor quadrato $b f$; unde & latus ejus latere $b f$ minus erit, ut $b g$; sumaturq; ipsius $e g$ duplus $a i$. Quoniam ergo totus $a d$ totius $e d$ duplus est, & ablati $a i$ ablati $e g$; erit & reliquus $i d$ reliqui $g d$ duplus; & $i d$ in g divisus bisariam. β Numerus ergo ex $i b$ in $b d$ cum quadrato ex $d g$ equalis quadrato ex $b g$. Sed eidem quadrato ex $b g$ equalis ponitur ex $a b$ in $b d$ cum quadrato ex $d f$. Ablatis igitur quadratis $d g$, $d f$ quorum $d g$ minor est; remanebit ex $i b$ in $b d$ major eo qui ex $a b$ in $b d$ pars toto. Non est ergo ex $a b$ in $b d$ cum quadrato ex $d f$ minor quadrato ex $b f$. Sicut neq; major, neq; equalis ostend-

ostensus est. Non itaq³ est quadratus ex $a b$ in $b d$
cum quadrato ex $d f$. Quod erat propositum.

Scholium. 3.

Hinc inventu faciles sunt duo numeri, ut compositus ex illis ad neutrum illorum habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum. Talis enim est compositus non quadratus ex duobus quadratis. Tales etiam sunt minimi non quadrati, in quas quadratus aliquis dividitur.

PROPOS: XXX.

Problema 6.

Invenire duas Rationales $a b$, $a f$
potentia tantum commensurabiles,
ita ut major $a b$, quam minor $a f$, plus
possit quadrato rectæ lineæ $b f$ longi-
tudine sibi commensurabilis.



Assunta recta Rationali $a b$, &
 a duob. numeris totis $c d$, $c e$ quorū
excessus $d e$ non sit quadratus, & si
at, ut $c d$ ad $d e$, ita quadratum
rectæ $a b$ ad quadratum $a f$ quæ se-
X 5 micirculo

a 2. Scholi.
propos.
præced.
 β per lem.
ma 6. X,

- micirculo super ab aptetur & fb connectatur.
 31. III. Cum ergo f in semicirculo & sit rectus, equale est
 quadratum ab quadratis af , fb & ab quàm
 af plus potest quadrato fb . Cumq; quadra-
 tum ex ab sit ad quadratum af , ut cd ad de ,
 6. def. & erunt illa quadrata inter se commensurabilia,
 adeoq; erit aequè quadratum af Rationale, & i-
 psa af Rationalis; atq; quadratum ab super Ra-
 tionali ab descriptum Rationale est. Rationales
 ergò sunt ab , af & potentia tantùm commensu-
 rabiles. Longitudine enim commensurabiles esse
 9. X. nequeunt erunt, & cum non habeant rationem
 24. IIX. quàm numerus quadratq; ad numerum quadra-
 tum quia de non est quadratus.

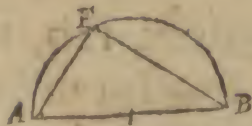
Iam verò quoniam est ut cd ad de , ita qua-
 dratum ex ab ad quadratum ex af , erit con-
 vertendo, ut numerus quadratus cd ad nume-
 rum quadratum ce , sic quadratum ex ab ad
 quadratum ex bf . Sunt ergò fb , ab longitu-
 dine commensurabiles.

PROPOS: XXXI.

Problema 7.

Invenire duas ab , af Rationales
 potentia tantùm commensurabiles,
 ita, ut major ab quàm minor af plus
 possit Quadrato rectæ lineæ fb sibi
 Longitudine incommensurabilis.

Assum-



CI 44. E 16. D C. 166. D.

C E - . . D.

Assumpta Rationali ab , α inveniantur duo α per Lem.
 quadrati numeri ce , ed , quarum summa cd ma 2. 29. X.
 non sit numerus quadratus: vel quadratus cd in
 duos ce , ed non quadratos dividatur; β habet 24. 11 X.
 bit cd ad neutrum ce , vel ed proportionē nu-
 merorum quadratorum, fiatq; γ , ut cd ad de β Lemma
 ita quadratum ab ad aliud, ut af ; & applica- 6. X.
 ta af ad semicirculum super ab descriptum, con-
 nectatur fb iam poterit ab plus quam af qua-
 drato recte fb , δ eruntq; ab , af Rationales δ 30. X.
 potentia tantum commensurabiles. Sed cum
 convertendo sit, ut prius, quadratum ab ad qua-
 dratum fb , ut cd ad ce : cd autem ad ce non
 fit ut quadratus ad quadratum. Non itaq; ab
 ad af habet rationem numeri quadrati ad nu-
 merum quadratum, & sunt Longitudine in- 7. X.
 commensurabiles. Inventæ ergo sunt duæ rectæ
 ab , af potentia solum commensurabiles, ut ab
 major plus possit quam minor af quadrato recte
 fb sibi longitudine incommensurabilis.

LEMMA.

Si sint duæ rectæ lineæ inæqua-
 les, erit ut major ad minorem;
 ita

ita rectangulum sub ipsis conten-
tum ad quadratum minoris.

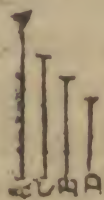
*Demonstratio eadem est cum Lemmatis 3. in
propof. 19. demonstratione.*

PROPOS: XXXII.

Problema 8.

Invenire duas Medias c, d poten-
tia tantum commensurabiles, quæ
rationale contineant; ita, ut major c ,
plus possit quam minor d , quadrato
rectæ lineæ sibi longitudine com-
mensurabilis.

20. X.



*Inveniantur duæ Rationales a, b po-
tentia tantum commensurabiles, ut a
major plus possit quam minor b , quadrato
rectæ sibi longitudine commensurabilis,
inter quas sit media proportionalis c ; fiat-
que, ut a ad b , ita c ad d . Quoniam ergo a, b
Rationales potentia tantum sunt commensurabi-
les, erit sub ipsis rectangulum irrationalale, & c re-
cta illud potens Media. Et quia est c ad d , ut a ad
 b , quæ potentia tantum sunt commensurabiles, et-
iam c & d potentia tantum commensurabiles, & e-
runt; & Media c commensurabilis d Media.*

12. X.

10. X.

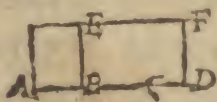
24. X.

Cons.

Comprehendent haec duae Mediae c, d potentia tantum commensurabiles Rationales quod ex 28. huius patet. Quia enim est ut a ad b , ita c ad d : Sed a quam b plus potest, quadrato rectae longitudine, ex const. sibi commensurabilis; & poterit & c plus quam d § 15. X. quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis. Patet ergo propositum. Si autem a, b , rationales se excederent quadrato rectae sibi incommensurabilis longitudine, eodem modo ostenderetur c, d medias potentia tantum commensurabiles continere Rationale, ut major c plus possit quam d , quadrato lineae sibi longitudine incommensurabilis.

LEMMA.

Si sint tres lineae rectae a, b, c, d , erit ut prima a ad tertiam c ita rectangulum $a e$ sub prima $a b$ & secunda $b c$ contentum ad id $e f$, quod sub secunda $b c$ & tertia $c d$ continetur.



Describatur ex $b c$, quadratum $c c$ compleaturque rectangulum $a f$. Erit $a c$, ad $c f$ ut $a b$ ad $c d$. § 1. X.

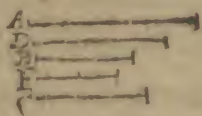
PROPOSITIO XXXIII.

Problema 9.

Invenire duas Medias de potentia solum

solum commensurabiles, quæ Medium contineant, ita ut major d plus possit quàm minor, e , quadrato rectæ lineæ, sibi longitudine commensurabilis.

α 30. X.
β per Lem.
ma. 2. 21. X.



α Inventis duabus a, c , assumatur b β utriq³ longitudine incommensurabilis ut habeantur tres Rationales a, b, c potentia tantum commensurabiles; ita ut a plus possit quàm c quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, Sumaturq³ d media proportionalis inter a & b ;

γ 13. VI.

δ 12. VI.

ε per Lem.
ma 32. X.

ζ 17. VI.

η 16. VI.

θ 3. Lem.
9. X.

ι 10. X.

λ 22. X.

μ 24. X.

d & sit d ad b , ut c ad e . Quia ergò est, ut a ad c , ita rectangulum sub a, b , ad rectangul. sub b, c . Sed rectangulo sub a, b , & æquale est quadratum ex d , & rectangulo sub b, c , rectangulum sub d, e . Ergò ut a ad c , ita quadratum ex d , ad rectangulum sub d, e ; Sed ut quadratum d , ad rectangulum d, e , ita recta d ad rectam e . Est ergò d ad e , ut a ad c : quæ cum potentia tantum fiat commensurabiles; & Ergò & d, e . Et quia d potens spaciū, sub Rationalibus a, b potentia solum commensurabilib⁹, & irrationalis est & Media & erit etiam ipsi commensurabilis E Media. Sunt ergò d, e due Media potentia solum commensurabiles, Cum verò ostenderimus rectangulo sub b, c Medio æquale esse rectangulum sub d, e ,

d, e , λ erit hoc quoque medium. Denique cum ostensum sit esse d ad e , ut a ad c ; Sed a plus posse quam c , quadrato recte sibi longitudine commensurabilis; similiter pl λ etiam poterit d quam e . Quod erat faciendum. 15. X.

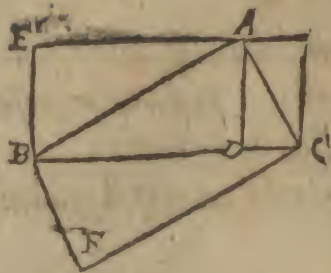
Quod si Rationalium a, b, c assumptarum potentia commensurabilium a plus posset quam c , quadrato recte sibi longitudine incommensurabilis, similiter ostenderetur, d, e , duas medias inventas potentia solum commensurabiles, continere medium, ut major d plus possit quam minor e , quadrato recte linea sibi longitudine incommensurabilis.

LEMMA. 1.

Sit unum rectangulum abc , angulum habens b, a, c rectum, a quo perpendicularis a, d esto demissa. Dico, rectangulum sub cb, bd æquale esse quadrato ab ; & contentum sub bc, cd æquale quadrato ac , & contentum sub bd, dc , æquale quadrato ad : contentum denique sub bc, ad æquale contento sub ab, ac .

Quia

28. VI.
 17. VI.
 16. VI.
 41. I.



Quia enim ab est inter
 bc & bd , a media pro-
 portionalis; rectangulum
 ex bc & bd β equale
 est quadrato ab . Eo-
 demq; modo rectangula ex

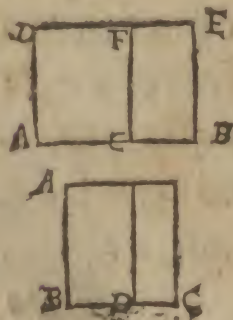
bc, cd , & ex bd, dc equalia sunt quadratis ca
 & da . Deniq; quia triangula abc , abd sunt
 similia, erit, ut bc ad a ; ita ab ad ad , quare
 rectangulum ex bc, ad equale est rectangulo sub
 ab, a ; vel ejusdem trianguli abc dupla re-
 ctangula ce, cb sunt equalia.

LEMMA 2.

Si recta linea ab secetur in duas
 partes inæquales ac, cb ; erit, ut ma-
 jor pars ac ad minorem cb , ita re-
 ctangulum af , sub tota ab & majore
 parte, ad rectangulum cd sub tota ab
 & minore parte cd contentum.

28. VI.

Super ab describatur quadratū, & ex c eriga-
 tur perpendicularis. Quoniam a est, ut ac ad cb ,
 ita af ad cd , patet propo-
 situm.



LEMMA 3.

Si sint duæ rectæ li-
 neæ inæquales ab ,
 bc minor autem bc se-
 cetur

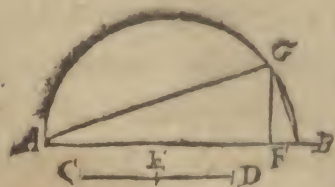
cetur in d bifariam; erit rectangulū ac sub ipsis contentum duplū rectanguli ad , quod sub maiori linea ab & dimidia parte bd , minoris bc continetur.

Completo a c rectangulo, & ducta parallela a x . VI. per d ipsi ab , & patet propositum.

PROPOSITIO XXXIV.

Problema. 10.

Invenire duas rectas lineas ab , gb , potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum verò sub ipsis contentum, Medium.



α Inveniantur due Ra. α 31. X.
tionales lineæ ab , cd , β Lemma 2
minorq; cd secetur bifa. 17. X.
riā in e , & fiatq; rectan-
gulum sub af , fb equale

quadrato ce . Describatur etiam semicirculus agb
& ipsi ab perpendicularis fg agatur, connectanturq;
 ag , gb . Quia ergo ab plus potest quàm cd qua-
dratio rectæ sibi longitudine incommensurabilis, ap-
plicatumq; est ad ab rectangulum afb , equale
 x
quarta

279. X. quarta parti quadrati cd , deficiens figura quadrati
 Lemma 2. ita: verit a f ipsi fb longitudine incommensurabilis. δ
 33. X. Sed ut a f ad f b , ita rectangulum b a f ad a b f re-
 Lemma 1. ctang. Quae duo rectangula aequalia sunt quadratis
 33. X. a g , g b , quia g in semicirculo ζ est rectus. Erit igitur,
 331. III. ut a f ad f b , ita quadratum a g , ad quadratum g b . Sed a f , f b sunt longitudine incommensurabiles. Ergo & quadrata a g , g b , ipsaeque rectae a g , g b potentia incommensurabiles. Et quia quadratum ex a b Rationali Rationale & aequale est quadratis a g , g b , etiam ex ipsis compositum Rationale erit. Rursus, quia a f b rectangulum, aequale quadrato c e & aequale est quadrato f g , erunt quadrata f g , c e , aequalia, & ipsae rectae f g , c e aequales; eritque c d dupla ipsius c e , etiam dupla ipsius f g . Quare rectangulum sub a b , c d , duplum erit rectanguli sub a b , f g . Sed sub a b , c d Rationalibus contentum est Medium: Ergo & sub a b , f g ipsi commensurable, ut pote duplum, est & Medium. Sed sub a b f g rectangulo: aequale est rectangulum sub a g , g b : Ergo sub a g , g b est medium. Sed ex eorum quadratis compositum erat Rationale. Ergo inventae sunt duae a g , g b potentia incommensurabiles, quae faciunt ex ipsarum quadratis compositum Rationale, sed Rectangulum sub ipsis Medium. Quod erat propositum.

PRO.

Problema 11.

Y 2

PRO.

EVCLIDIS ELEM:
PROPOS: XXXVI.

Problema 12.

Invenire duas rectas lineas,
 ag, gb potentia incommensurabiles,
quæ faciant & compositum ex ipsa-
rum Quadratis Medium, & Rectan-
gulum sub ipsis contentum Medium,
incommensurableq; composito ex
ipsorum Quadratis.

Inveniantur iterum ex sententia 2. partis
propos. 33. due Medie ab, cd , & reliqua fiant,
ut in 34. hujus. Ostenditur similiter ag, gb
rectas incommensurabiles esse potentia; compo-
situmq; ex ipsarum quadratis esse Medium, ipsarumq;
rectangulum sub ag, gb esse Medium. Sed quia
 ab ipsi cd est α incommensurabilis longitudine, ce
verò ipsi cd , ut duplæ commensurabilis longitu-
dine, etiam ab ipsi ce longitudine incommensura-
bilis β erit. Sed ut ab ad ce ; ita quadratum ex
 ab , ad rectangulum sub ab, ce , id est, ad ab
 fg , vel ag, gb . Ergò quadratum ab est, incom-
mensurable rectangulo ag, gb . Quæ sunt due re-
ctæ inveniendæ.

α ex hypo.

β 13. X.

73. Lemma

29. X

81. Lemma

33. X

10. X.

Princi-

*Principium Senariorum per
Compositionem.*

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema 25.

Si duæ Rationales ab , bc poten-
tia tantum commensurabiles com-
ponantur; tota ac Irrationalis erit.
Vocetur autem ex Binis nominibus.



a Inventæ duæ ab , bc componantur. Fiet tota
 ac Irrationalis. Quia enim a b ipsi b c est longi- *a 2. Lem.*
tudine incommensurabilis, estq; ut a b ad b c, ita *21. X.*
 ab c rectangulum ad b c quadratum, γ erit re- *lem. 31. X.*
ctang. ab c quadrato b c incommensurabile: Sed *19. X.*
rectangulo a b c ipsius duplum est commensurabi-
le; & quadrato b c quadratum a b est commen-
surabile (quia sunt Rationalia) adeoque ex quadra-
tis a b, b c compositum eidem b c quadrato com-
mensurabile d est. Itaq; quod bis sub a b, b c con- *d 16. X.*
tinetur, composito ex quadratis rectarum a b, b c *e 14. X.*
incommensurabile erit. Quare & compositum
ex eo, quod bis sub a b, b c & ex composito qua-
dratorum a b, b c, scilicet, ex tota ac quadra-
tum, composito ex quadratis rectarum a b, b c *f 4. II.*
incommensurabile n erit. Sed quod ex quadratis re- *17. X.*
ctarum

γ 3

ctarum

Et ab, bc , est Rationale; quia commensurabile est quadrato rationalis bc . Igitur ex $a c$ quadratum, Rationali ex bc quadrato incommensurabile θ , irrationale est ipsa^q recta $a c$ Irrationalis. Vocetur autem ex binis nominibus vel Binomium, quia ex duobus nominibus nempe duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus componitur.

Scholium.

Ex duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus duæ Irrationales procreantur. Media enim inter eas α est Irrationalis, β item^q; ex ipsis composita seu Binomium.

PROPOS: XXXIIX.

Theorema 26.

Si α duæ Mediæ ab, bc potentia tantum commensurabiles α componantur, quæ Rationale contineant; tota αc Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima.

$A \text{---} E \text{---} C$

Quia enim ab ad bc est, ut ab c rectangulum ad

ad quadratum bc : Sed ab , bc sunt longitudine
incommensurabiles. β Sunt ergo abc rectangu-
lum & quadratū bc incommensurabilia. Est au-
tem rectangulo abc bis sub ab , bc commensu- $\beta 10. X.$
rabile; & γ quadrato bc compositum ex quadratis $\gamma 16. X.$
 ab , bc . Igitur rectangulum sub ab , bc bis,
& compositum ex quadratis rectarum ab , bc ,
sunt δ incommensurabilia inter se. Ergo compo $\delta 14. X.$
situm ex quadratis ab , bc una cum rectangulo
 abc bis, id est, quadratum ac ζ incommensura- $\zeta 4. II.$
bile est rectangulo abc bis sumto. Sed eidem $\zeta 17. X.$
 abc rectangulo bis, est commensurabile ipsum
semel. η Igitur quadratum ex ac est incommensu- $\eta 13. X.$
rabile rectangulo abc . Sed abc rectangulum $\theta 10. def. X.$
ponitur Rationale. Ergo quadratum ac est θ Ir-
rationalale, ipsa q_2 ac \times Irrationalis. Vocetur autem $\times 11. def.$
ex Binis Mediis prima vel Bimediale prius.

LEMMA.

Quod sub Linea Rationali ab &
Irrationali bc continetur rectangu-
lum, Irrationale est.



Sin minus, ipsum Rationale ad Rationalem ab
applicatum, α faciet latitudinem bc Rationalem $\alpha 21. X.$
contra hypothesin.

T 4

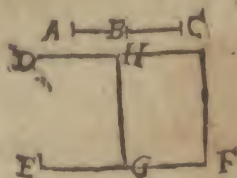
PRO.

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema 27.

Si duæ Mediæ a , b , b , c potentia tantum commensurabiles & componantur, quæ Medium contineant; tota a , c Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs secunda.

¶ 45. I.



¶ 4. II.

¶ ex hypothesi.

¶ cor. 24. X.

¶ 16. X.

¶ 23. X.

¶ 3. Lem.

19. X.

¶ 10. X.

¶ Expositæ Rationali d , applicetur rectangulum d , f æquale quadrato, a , c ; & composito ex quadratis a , b , b , c æquale sit d , g . ¶ Erit itaq; h , f æquale bis sumto rectangulo a , b , c . Quodcum sit d Medium; ¶ erit & h , f ipsius duplum medium. Et quia quadrata mediarum a , b , b , c commensurabilia sunt potentia, etiam ex ipsis compositum rectangulum d , g utriusvis ipsorum ¶ commensurabile erit. Sed utrumq; quadratum ex Medijs est Medium. Ergo & d , g erit Medium: Quoniam ergo d , g , h , f Media ad d , c Rationalē applicatur, ¶ erunt latitudines eorum e , g , g , f Rationales ipsi d , c longitudine incommensurabiles. Rursus quia longitudine incommensurabiles sunt a , b , b , c , & ¶ est, ut a , b ad b , c , ita quadratum a , b ad rectangulum, a , b , c ; ¶ erunt, quadratum a , b & rectang. a , b , c longitudine incommensurabilia.

Sed

Sed quadrato ab compositum ex ab , bc quadratis, & rectangulo abc solum duplū ostensum est commensurabile. λ Ergo compositum ex quadratis ab , bc id est dg incommensurabile est $\lambda 14. X.$
 bis sumto rectangulo abc id est hf , μ Est verò $\mu 1. VI.$
 ut dga ad hf , ita cg ad gf . \approx Sunt itaq; cg , gf longitudine incommensurabiles. Quæ cum sint ostense Rationales, erunt Rationales potentia tantum commensurabiles, & composita cf , ν $\nu 37. X.$
 rationalis. ξ Est itaq; rectangulum df sub Rationali de & ef irrationali, irrationale & ξ Lemma
 ipsi æquale quadratum ac irrationale, ipsaq; $\nu 58. X.$
 ac irrationalis. Hæc vocetur ex Binis mediis, vel Bimediale posterius.

LEMMA.

Si Recta linea ad non secetur bifariam in b , erit compositum ex quadratis partium ab , bd majus, quàm Rectangulum sub partibus ab , bd bis comprehensum, quadrato ejus lineæ ac qua major pars ab minorem bd superat.

$A \text{---} C \text{---} B \text{---} D$ Quoniam quadrata ab , bc \approx aequalia $\alpha 7. II.$
 sunt rectangulo abc bis sumto, cum quadrato ξ ac ; estq; bc ipsi bd æqualis, erunt quoque quadrata ab , bd aequalia rectangulo abd bis sumto
 T 5

sumto unà cum quadrato ac : Quare ex ab , bd
quadrata majora sunt rectangulo abc bis sum-
to quadrato ac . Quod erat propositum.

Corollarium.

Quadrata partium inæqualium si-
mul majora sunt rectangulo bis sub
partibus inæqualibus contento.

PROPOSITIO XL.

Theorema 28.

34. X.

Si duæ rectæ ab , bc potentia in-
commensurabiles componantur; quæ
faciant compositum quidem ex ipsarum
quadratis Rationale; quod autem sub
ipsis continetur, Medium; tota ac re-
cta linea irrationalis erit. Vocetur au-
tem Major.



Cor.
24. X.

Quia abc rectan-
gulum ponitur Mediū,
ejus etiam duplum β erit Medium & Irrationale.
Sed compositum ex quadratis ab , bc ponitur
Rationale: Bis ergo sumtum abc rectangulum
illi

illi est γ incommensurabile. Quare & rectan- $\gamma 10. X.$
 gulum abc bis cum quadratis ab, bc , id est $\delta 4. II.$
 quadratum ac incommensurabile est compo- $\epsilon 17. X.$
 sito ex quadratis ab, bc . Cum autem compo- $\zeta 10. def.$
 situm ex quadratis, ponatur rationale erit $\zeta 11. def.$
 quadratum irrationale, ipsa ac recta irratio-
 nalis, quæ vocetur Major: Quia cum possit duo
 quadrata ex ab, bc & rectangulum abc bis,
 compositum ex quadratis ab, bc & majus est re- θ Lemma
 ctangulo abc bis. Quare cum compositum ex $39. X.$
 quadratis sit Rationale, & abc rectangulum
 Medium, rectè dicitur ac Major, siquidem à Ra-
 tionali, quod majus est, convenit imponere
 nomen.

PROPOS: XLI.

Theorema 9.

35. X.

Si a duæ rectæ lineæ ab, bc po-
 tentia incommensurabiles compo-
 nantur, quæ faciant compositum
 quidē ex ipsarum quadratis Medium;
 quod autem sub ipsis continetur, Ra-
 tionale: tota recta linea ac irratio-
 nalis erit. Vocetur autem Rationa-
 le ac Medium potens.

Quo-



Quoniam compo-
situm ex quadratis $a b$,

¶ 10. X.

¶ 4. II.

¶ 17. X.

¶ 10. def.

¶ 11. def.

$b c$ est Medium, rectangulum verò $a b c$ bis sum-
tum Rationale, & erit compositum ex quadratis
incommensurabile rectangulo bis sumto. Igitur
& compositum ex quadratis cum bis sumto re-
ctanguli γ id est, quadratum $a c d$ erit duplo re-
ctangulo $a b c$ incommensurabile. Cum autem
duplum rectanguli $a b c$ sit Rationale, & erit $a c$
quadratum irrationale, ipsaq; $a c$ irrationalis,
Quæ vocetur, Rationale ac Medium potens,
quia potest Medium ex quadratis $a b$, $b c$ com-
positum, & Rationale scilicet bis sumtum rectan-
gulum $a b c$. Verum Rationale anteponitur ir-
rationali quod natura sit prius, ut ut ordine hic
sit posterius.

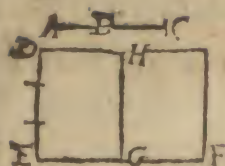
PROPOSITIO XLII.

Theorema, 30.

¶ 36. X.

Si a duæ lineæ rectæ $a b$, $b c$ pos-
tentia incommensurabiles compo-
nantur, quæ faciant & compositum ex
ipsarum quadratis Medium, & quod
sub ipsis continetur, Medium, incom-
mensurabileq; composito ex quadra-
tis ipsarū: tota recta linea $a c$ irratio-
nalis erit. Vocetur autem bina Media
potens.

It e-

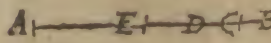


Iterum exponatur Rationalis de , ad quam β applicatum sit rectangulum df $\beta.45.I.$
 quale quadrato ac ; & dg $\gamma.41.II.$
 quale composito ex quadratis ab , bc , & eritq; hf $\delta.23.X.$
 hf quale bis sumto rectangulo abc . Quoniam
 igitur tam compositum ex quadratis ab , bc id
 est dg , quam rectangulum abc bis sumtum
 id est hf sunt Media, & facient dg , hf applica-
 ta ad rationalem de latitudines eg , gf Ratio-
 nales longitudine incommensurabiles. Et quia
 compositum ex quadratis ab , bc id est dg in-
 commensurabile ponitur rectangulo abc , cuius
 duplum est hf , & erunt dg , hf incommensura-
 biles. Sed ut dg ad hf , ita eg ad gf , & erunt
 itaq; eg , gf rationales longitudine incommen-
 surabiles vel potentia commensurabiles, adeoq;
 tota ef , & irrationalis. Est ergo df subratio
 nali de & irrationali ef contentum irrationalis
 le, & quadratum ex ac illi equale irrationale,
 ipsaq; ac irrationalis, quae vocetur Bina Media
 potens, quia & compositum ex quadratis ab , bc
 & rectangulum abc erant Media.

LEMMA I.

Si recta linea ab in partes inæ-
 quales in c & d secetur, & rursus in a-
 lias partes inæquales; erunt quadrata
 par-

partium ac , cb magis inæqualiū simul
 majora quadratis partium ad , db mi-
 nus inæqualium simul.

 Bisecta ab in e , cadit d
 punctum vel inter ec , vel in-
 ter ea . Primò cadat inter ec . α Quoniam acb

α 5. II.

rectangulum cum quadrato ec æquale est qua-
 drato eb , ut & adb rectangulum cum ed qua-
 drato eidem eb quadrato æquale, erunt, rectan-
 gulum acb cum quadrato ec , & rectangulum
 adb cum quadrato ed æqualia. Ablatis autem
 inæqualium rectarum ec , ed quadratis, cum
 quadratū ec sit majus quadrato ed , reliquum
 rectangulum acb minus erit reliquo adb , &
 propterea bis sumtum acb rectangulum, bis
 sumto adb erit minus. Sed quadratum abt tam
 rectangulo acb bis cum quadratis ac , cb , quàm
 rectangulo adb bis cum quadratis ad , db est

ϵ 4. II.

β æquale: Sunt ergò æqualia rectangulum acb
 cum quadratis ac , cb & rectangulum adb
 cum quadratis ad , db : & cum acb sit minus
 quàm adb , erunt residua quadrata ac , cb , ma-
 jora quadratis ad , db Quod erat propositum.
 Deinde cadat d intra ac . Quoniam ac , cb par-
 tes magis sunt inæquales quàm ad , db , erit ad
 major quàm cb , ac proinde cum ae , eb sint æ-
 quales, erit ec reliqua major reliqua ed . Itaq;
 quia rectangulum acb cum quadrato ec qua-
 drato

78. 9. Def.
34. X.

27. X.
Schol.

22. X.

27. X.

idem sit bis sumtorum reſtangularum: Sed exceſſus compoſitorum ex quadratis eſt ſpaciū Rationale (& Rationalium enim ac, cb quadrata & ex ipsis & compoſitum ſunt Rationalia; item q_3 & ex ad, db quadrata unū cum ſuo compoſito ſunt rationalia. Cum ergo Rationale ſuperet Rationale rationali, manifeſtum eſt rationalem eſſe exceſſum compoſitorum ex quadratis) Igitur & exceſſus reſtangulari acb & adb quolibet bis ſumto, eſt ſpaciū Rationale. Sed acb reſtangularum eſt & Medium. Ergo & duplum, ſicut & adb reſtangularum. Cum verò Medium non ſuperet medium Rationali; non poteſt exceſſus reſtangularum eſſe Rationale, quod tamen in precedentibus concludebatur. In alio itaq; puncto quàm c ſecari ab in ſua nomina impoſſibile eſt.

PROPOSITIO XLIV.

Theorema 32.

Quæ ex binis medijs prima ab , ad unum duntaxat punctum d dividitur in nomina ad, db .

Dividatur, ſi poteſt, in a — d — c — b lia ad c nomina vel duas Medias potentia commenſurabiles, qua comprehendant Rationale juxta 38. hujus. Pari hic ratione, ut in precedenti propoſitione erit idem exceſſus

excessus reſtangularum a b c & a d b bis, qui com-
poſitorū ex quadratis a c, c b & a d d b. Sed Ratio-
nalia reſtangularum bis excessus α eſt Rationa-
le ſpaciū. Ergo & excessus compoſitorum ex qua
dratis & ſpaciū Rationale. Cum verò a d, d b
ſint Media, & potentia commenſurabiles, erunt
& eorum quadrata Media & commenſurabilia,
atq; ita ex ipsis compoſitū utrumq; erit & β com-
menſurabile & γ Medium. Cum verò medium
d non ſuperet Mediū rationali. Itaq; excessus com-
poſitorū ex quadratis non erit Rationale ſpaciū,
quod tamen modo concludebatur. In alio itaq;
puncto quàm c ſecari a b in ſua nomina eſt im-
poſſibile.

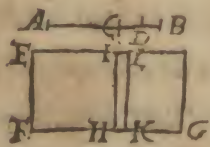
α 2. Scholi.
27. X.

3 16. X.
 γ 24. X.
 δ 27. X.

PROPOS: XLV.

Theorema 33.

Quæ ex binis Mediis, Secunda ab ,
ad unum duntaxat punctum c divi-
ditur in nomina ac, bc .



¶ 4. II.

¶ Lemma

39. X.

¶ 1. VI.

¶ 16. X.

¶ cor. 24. X.

¶ 23. X.

¶ 3. Lem.

19. X.

¶ 10. X.


aquale quadrato ab , & eh aquale quadratis ac ,
 cb , & ek quadratis ex ad , db . β Erit ergo
 ig aquale duplo rectanguli acb & lg aquale du-
plo rectanguli acb & lg aquale duplo rectangu-
li adb . Et quia quadrata ex ac , cb quadra-
tis ad , db γ sunt inequalia, etiam rectangula
 eh , ek erunt inequalia: δ quare & recta fh , fk
sunt inaequales. Rursus, quia quadrata ex ac ,
 cb sunt majora rectang. acb bis, erit eh majus
ipso ig , atq; ita fh major dimidio ipsius fg ,
quod de fk ostendetur. Quare bg , fh , hg sunt par-
tibus fk , kg inaequales singulis singula. Quia ve-
ro ac , cb sunt Mediae potentia commensurabiles,
erunt etiam ipsarum quadrata media & commen-
surabilia, & adeoq; compositum ex ipsis utriq; ipso-
rum commensurabile; ideoq; & eh , & ek ζ sunt
media. Cumq; ita ef sit Rationalis, η erunt fh ,
 fk Rationales longitudine ipsi incommensurabi-
les. Sic etiam rectanguli acb Medij duplum ig
erit medium & hg Rationalis longitudine incom-
mensurabilis; perinde ut & lg Medij, kg Ratio-
nalis longitudine incommensurabilis ipsi ef osten-
detur. Rursus quia ac , cb longitudine sunt incom-
mensurabiles, & est, θ ut ac ad cb , sic quadra-
tum ac ad rectangulum acb , κ erunt haec etiam
incommensurabilia. Sed quadrato ac compositum
ex quadratis ac , cb est commensurabile, ut antea
constat; & rectangulo acb suum duplum est com-
mensu-

inmensurabile. λ Itaq, compositum ex quadratis $a c$,
 $c b$, id est, $e h$ est incommensurabile duplo re-
 ctanguli $a c b$, id est, $i g$. δ Sed ut $e h$ ad $i g$, ita
 $f h$ ad $h g$. α Sunt ergo $f h$, $h g$ longitudine in- $\lambda 14. X.$
 commensurabiles. Cum vero etiam sint Rationales, $\mu 37. X.$
 erunt Rationales potentia solum commensurabiles. $\nu 43. X.$
 μ Tota ergo $f g$ est Irrationalis, quæ ex binis nomi-
 nibus appellatur, divisæq, in nomina ad punctum;
 nec potest $f g$ in alio puncto ut k dividi in alia no-
 mina. Itaq, nec $a b$ bimediale posterius in alio
 puncto quam c dividi potest in nomina.

PROPOSITIO XLVI.

Theorema 34.

Major $a b$ ad unum duntaxat pun-
 ctum c dividitur in nomina $a c$, $c b$.

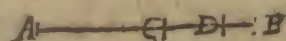
 Si potest, dividatur in d in
 nomina, qualia $\alpha 0$. propo. re-
 quirunt. α Erit excessus quadratorum $a c$, $c b$ & a
 d , $d b$ idem cum excessu rectangulorum $a c b$ du-
 pli & $a d b$ dupli. Sed excessus duorum compo- $\alpha 43. X.$
 torum ex quadratis binis est spaciū Ratio-
 nale. Igitur & excessus rectangulorum binorum.
 Sed rectangulum $a c b$ ponitur Medium; β ideoq, β cor. 14. X
 duplum ipsius etiam est Medium; eodemq, modo &
 $a d b$ Mediū erit. γ Sed Mediū non superat Medi-
 um Rationali. Itaq, excessus binorum rectangulo- $\gamma 17. X.$
 rum non erit spaciū Rationale, quod tamen an-
 te a sequebatur. Non ergo in alio quam c puncto
 secabitur Major.

Z 2 PRO.

EVCLIDIS ELEM:
PROPOS: XLVII.

Theorema 35.

Rationale ac Medium potens ab
ad unum duntaxat c punctum divi-
ditur in nomina ac, cb .



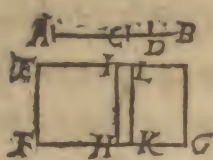
α 43. X. *Si potest, dividatur in nomina, qualia 41. pro-
pos. requirit. Er it excessus quadratorum $ac,$
 cb & ad, db idem cum excessu rectangulorum
 $acb,$ & adb duplorum. Qui excessus in rectan-
gulis est spacium Rationale. Ergo & in compo-
sitis quadratorum. Quae composita ex quadratis;
 β 27. X. $ac, cb,$ & ad, db cum ponantur Media. β Itaq;
excessus non potest esse spacium Rationale, ut jam
sequebatur, Non ergo in alio quam c puncto seca-
bitur Rationale & Medium potens.*

PROPOS: XLIIX.

Theorema 36.

Bina Media potens ab , ad unum
duntaxat punctum c dividitur in Me-
dia nomina. ac, cb .

*Si potest, dividatur in d in nomina, qualia re-
quirit 42. hujus. Cōstructione adhibita eadem, quae
in*



in 45. patet, partibus fh , hg ,
partes fk , kg singulis singulas
esse inaequales. Cum ergo com-
positum ex quadratis ac , cb ponatur

Medium, erit eh Medium, cumque rectan-
guli ac b duplum sit Medium, erit ig Medium:

α Eruntque fh , hg Rationales longitudine incom- α 23. X.

mensurabiles ipsi e f ut eh fk kg . Cum vero
compositum ex quadratis ac , cb id est, eh sit in- β ex hypo-
commensurabile rectanguli ac b duplo, id est, ig sit in- thes.

ig , sitque, ut eh ad ig ita fh ad hg , γ erunt eh hg γ 10. X.

longitudine incommensurabiles. Cumque sint o- δ 37. X.

stensa Rationales, erunt Rationales potentia tan-
tum commensurabiles, totaque fg Irrationalis est

ex binis nominibus, divisa in h puncto in nomina.

Sed eodem modo dividi ea non patitur 43. in puncto

k . Igitur nec ab in alio puncto quam c dividitur
in nomina. Quod erat propositum.

Definitiones secundæ.

Iam investigat autor omnia binomia,
quorum sex habet ideò. Quia enim No-
mina Binomij sunt duæ Rationales, quæ
nequeunt ambæ esse expositæ Rationali
commensurabiles, nisi ipsæ quoque velint
esse longitudine inter se commensurabi- α 12. X.

Z 3 les

les, vel una tantum siue Major siue Minor, vel neutra tria sunt genera binomiorum. Quoniam etiam Nomina sunt inaequalia, poterit majus minore plus quadrato vel longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Unde si plus possit quadrato longitudine commensurabilis una cum dictis tribus generibus tres diversa linea binomiales; Sed si plus quadrato longitudine incommensurabilis, cum ijs tribus, iidem tres oriuntur.

Exposita ergo Rationali, & quæ ex binis nominibus divisa in nomina, cujus majus nomen plus possit quam minus quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis.

1. Si majus nomen expositæ Rationali cōmensurabile sit longitudine, vocetur ex binis nominibus prima.
2. Si minus nomen expositæ Rationali commensurabile sit lōgitudine, vocetur ex binis nominibus secūda.
3. Si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ Rationali, vocetur ex binis nominibus Tertia.

Rursus

Rursus si maius nomen plus possit quam minus quadrato recta linea sibi longitudine incommensurabilis.

4. Si maius nomen exposita Rationali commensurabile sit longitudine, vocetur ex binis nominibus quarta.

5. Si verò Minus nomen, vocetur Quinta.

6. Quod si neutrum ipsorum nominum: vocetur sexta.

PROPOSITIO XLIX.

Theorema 13.

Invenire ex binis nominibus primam.

A C B



α Inventis duobus numeris a b, c b, quorum α 2. Scholia excessus a c non sit quadratus, ita ut a b, c b proportionem habeant

numeri quadrati ad quadratum a b, a c non. Exponatur autē Rationalis β quapiam d, cui, et sumatur longitudine cōmensurabilis, quae c f ob id quoq; β cor. 6. X. Rationalis erit. Fiat deinde ut a b ad a c ita quadratū c f ad quadratū f g. Erit e g ex binis nominib.

Z

4

Quoni

v 6. X.

d 9. X.

• 37 X.

Lemma

14. X.

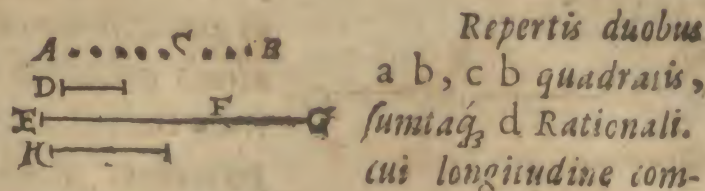
Quoniam quadrata ef , fg sunt \vee commensurabilia, erunt ipsæ rectæ etiam commensurabiles solum potentia. Sed ef est Rationalis. Ergo & fg . Quia verò ab ad ac non habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum, etiam quadrata ef , fg non habent proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. δ Sunt ergo ef , fg longitudine incommensurabiles; atq; ita Rationales potentia solum commensurabiles; ipsa q; eg irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur. Erit etiam prima. Cum sit ut numerus ab ad ac ita quadratum ef ad quadratum fg , sit etiam ab maior quàm ac , etiam quadratum ef erit majus quadrato fg & quidem quadrato h . Quia ergo est, ut ab ad ac , ita quadratum ef ad quadratum fg ; etiam convertendo erit, ut ab ad cb , nempe ad excessum, quo antecedens ab superat consequentem ac , ita quadratum ef ad quadratum h . Habet autem ab ad cb rationem quam quadratus numerus ad quadratum; Itaque & quadrata ef & h ; eruntq; commensurabiles longitudine ef , & h . Quoniam majus nomen ef expositæ Rationali d est longitudine commensurabile, ut patet; & potest plus quàm minus fg quadrato rectæ h sibi longitudine commensurabilis; erit eg per defin. ex binis nominib. prima.

PROPOS: L.

Problema 14.

Inven-

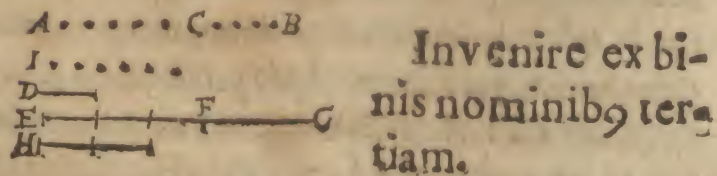
Invenire ex binis nominibus secundam.



mensurabilis sit fg , quæ ideo est Rationalis, ^a Fiat ut a c numerus ad a b, ita quadratum gf ad quadratum fe : Erit eodem modo ut in præcedenti e g binomialis. Quæ & erit secunda. Cum enim sint ut a c, a b, Quadrata rectarum gf , fe ; etiam sunt convertendo ut a b ad a c ita quadratum e f ad fg . Sed ab quàm a c est major, erit ergò quadratum e f majus quadrato fg , ^β & quidem sit quadrato rectæ h . Iterum ^β Lemma hic ut in præcedenti ostendetur h ipsi e f longitudine commensurabilis esse. Quoniam ergò majus nomen e f plus potest quàm minus fg expositæ Rationali d longitudine commensurabile, ut patet ex prioribus, quadrato rectæ h sibi longitudine commensurabilis: Erit e g ex binis nominibus per defin. secunda. ^a Cor. 6. X.

PROPOSITIO LI.

Problema 15.



Zs Re-

A C B

I

D ———

E ——— F ——— G

H ———

Repertis duobus
quadratis ab, cb
ut antea, sumatur
alius i qui ad neu-
trum habeat pro-
portionem quam

- quadratus ad quadratum. Assumpta d ratio-
nali a fiat, ut i ad ab , ita quadratum recte d
ad quadratum ef , quae quadrata perunt com-
mensurabilia, cum habeant proportionem numero-
rum: Sed cum non quadratorum γ erunt d & ef
longitudine incommensurabiles. Fiat rursus ut
 ab ad ac , ita quadratum ef ad quadratum fg ,
quae etiam perunt commensurabilia; sed latera
ipsa γ incommensurabilia. Sunt ergo ef, fg
Rationales potentia tantum commensurabiles,
& tota eg irrationalis ex binis nominibus.
Quae erit tertia, Quia enim d , ut i ad ab , ita
quadratum d ad quadratum ef . Sed i ad ab
non est ut numerus quadratus ad quadratum.
Ergo nec d ad ef , & sunt longitudine γ incommensurabiles. Quia etiam est ut ab ad ac , ita
quadratum ef , ad quadratum fg ; Sed ab ma-
ior est quam ac , etiam ef erit majus fg . Sit
autem majus quadrato recte h . Erit ut quar-
tus h ipsi ef longitudine incommensurabilis.
Quoniam majus nomen ef pl γ potest quam min γ
 fg quadrato recte h sibi longitudine commensu-
rabilis, & neutrum ef, fg exposita Rationali
desit

Lemma.
14. X.

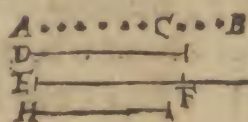
d est longitudine commensurabile. Erit ergo eg per def. ex binis nominibus tertia.

Binomia secunda & tertia inveniuntur facilius si similes plani numeri à se mutuò auferantur; reliquus enim vel est quadratus, & oritur binomium secundum, vel non quadratus, & oritur binomium tertium.

PROPOS: LII.

Problema 16.

Invenire ex Binis nominibus Quartam.



Inventis duobus numeris ac, cb ex quibz compositus ab ad neutrum ipsorum habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum, & assumpta rationali d, cui longitudine commensurabilis sit ef perficianturq; cetera ut in 49. huius.

35. schol. 29. X.

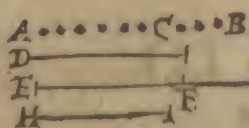
Erit ut ibi eg ex binis nominibus: & quidem Quarta. Majus sit quadratum ef quàm fg quadrato h. Quia autem convertendo est, ut in 49. ut ab ad cb, ita quadratum ef ad quadratum h. Sed ab ad cb non est ut quadratus ad quadratum: Ergo nec quadrata ef, & h habebunt proportionem quadratorum; & eruntq; recte ef & h incommensurabiles. Itaq; cum majus nomen ef, quod & exposita rationali d commensurabile est, plus possit quàm minus fg quadrato recte h sibi longitudine incommensurabilis, erit eg per defn. ex binis nominibus quarta.

Proposit

EVCLIDIS ELEM:
PROPOS: LIII.

Problema 17.

Invenire ex binis nominibus quin-
tam.



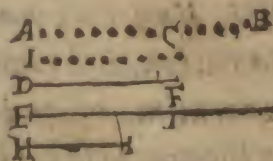
Inventis numeris a c,
cb ut in precedenti, & ad-
hibitis reliquis ut in 50.
hujus: Erit c g ex binis

nominibus & quidem Quinta. Sit quadratum
e f majus quàm quadratum f g, quadrato h.
Erit, ut in 49. convertendo, ut a b ad c b, ita
quadratum e f ad quadratum h. Erunt e f & h
incommensurabiles ut in 52. Quia ergò majus
e f nomen quàm minus f g, quod & proposita
rationali commensurabile est, plus potest qua-
drato rectæ h sibi longitudine incommensurabi-
lis, erit per defin. c g ex binis nominibus
quinta.

PROPOS: LIV.

Problema 18.

Invenire ex binis nominibus se-
xtam.



Inventis a c, cb pla-
nis non similibus, quorum
neuter sit quadratus, nec
ex ipsis compositus qua-
dratus sit, habeatur ad aliquem eorum qua-
dra-

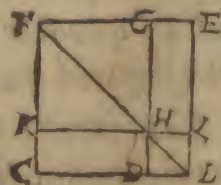
dratorum proportionem; sumatur aliquis quicumque numerus i , qui nec ad ab , nec ad ac quadratorum proportionem habeat, qualis est qui in quadratus; assumptaque rationali d , fiant cetera ut in 51. huius. Patet ut ibi e & f , fg longitudine esse incommensurabiles & totam eg , ex binis nominibus. Et quidem est sexta. Quia, si quadratum ef quam quadratum fg majus sit quadrato h , ut in 52. ef & h sunt longitudine incommensurabiles. Itaque cum majus nomen ef plus possit quam fg , quorum neutrum posset rationali sit commensurabile, quadrato recte h sibi longitudine incommensurabilis, erit ex binis nominibus per defn. sexta.

Sæpe promittitur Binomia quinta & sexta occurrunt, si dissimiles plani à se invicem auferantur, reliquum vel quadratum est & oritur binomium quintum, vel non, & nascitur binomium sextum.

LEMMA.

Si recta linea bc secta sit utcumque in d ; erit rectangulum eb sub partibus el , lh contentum, medium proportionale inter earum quadrata ld , gk ; item rectangulum de contentum sub tota & una parte, medium proportionale inter quadratum ce , totius lineæ, & quadratum dl dictæ partis.

De-



Descriptio quadrato $c e$ super $b c$, è sectionis puncto d erigatur perpendicularis $d g$ ducaturq; diagonus $b f$, & $l k$ parallela ipsi $b c$. Erit $e h$ medium proportionale inter $g k$ $l d$ quadrata. α Quia

¶ 1. VI.

¶ 43. I.

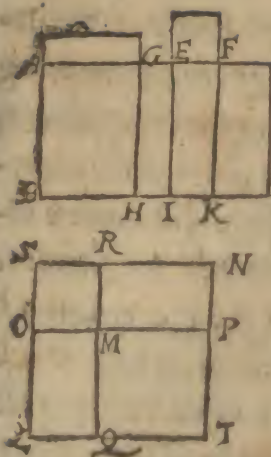
ergo est ut $k h$, ad $h l$; ita tam $g k$ ad $e h$, quam $e h$ ad $d l$, erit, ut $g k$ ad $e h$, ita $e h$ ad $d l$. Sed $e h$ & $e h$ sunt equalia. Est ergo rectangulum sub partibus medium proportionale inter earundem partium quadrata. Rursus α quia est ut $c b$ ad $b d$, ita tam $c e$ ad $d e$, quam $c l$ ad $d l$. Sed $d e$ & $c l$ β sunt equalia. Est ergo rectangulum de sub tota & una parte, Medium proportionale inter quadratum totius $c e$ & dictæ partis quadratum $d l$.

PROPOSITIO LV.

Theorema 37.

Si spacium $a c$ contineatur sub Rationali $a b$, & ex binis nominibus prima $a d$; Recta linea $o p$ spacium potens irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

Divi-



Divisa a d in nomina
a c majus & e d minus, se-
cetur e d in f bifariam.

Quia ergo a c plus potest
quàm e d quadrato recta fi-

α def. bin.
primi.

bi longitudine commensura-
biles. Si ad eam quartapar-
ti quadrati e d i.e. quadrato
et aequale Parallelogrammū
a g e β applicetur, & dividet

β 2. Lemma

ipsam a c in partes a g, g c

17. X.

18. X.

longitudine commensurabiles. Per puncta g e f
ducantur ipsi a b parallela g h, e i, f k d fiant q

14. II.

a h, g i rectangulis aequalia quadrata l m, m n
juncta ad angulum m ita, ut o m, m p unam
efficiant rectam & compleatur totum l n qua-
dratum. Quoniam itaque rectangulum a g e

aquale est quadrato e f, & erit ut a g ad e f, ita

ex const.

17. X.

1. VI.

e f ad g e; quare ut a h ad e k, ita e k ad g i.

Est itaque e k inter a h, g i medium propor-
tionale. Sed ipsis a h, g i sunt aequalia l m,

m n quadrata, & inter quae medium proportio-
nale est t m. Itaque t m est aequale ipsi e k.

Lemma

precedens

Cum itaque t m sit aequale m s & e k ipsi

43. I.

36. I.

f c, erit & m s ipsi f c aequale, totumque l n

quadratum toti rectangulo a c aequale, & o

p potest spacium a c sub Rationali a b &

bin-

binomiali prima a d contentum. Erit ea irrationalis ex binis nominibus. Quoniam enim a g g c ostensa sunt longitudine commensurabiles, ¶ 16. X. erit a e tota utrique ipsarum longitudine commensurabilis. Sed a e, cum sit majus nomen binomialis primae a d, rationali a b longitudine est commensurabilis. Ergo a g, g e eidem a b longitudine sunt commensurabiles, ipsaeq; ut a b ¶ 20. X. erunt Rationales. Sunt itaque rectangula a h, g i sub rationalibus rationalia, ipsisq; equalia quadrata l m, m n rationalia, rationalesq; rectae o m, m p. Et quia a e ipsi e d est longitudine incommensurabilis; sed eidem a e longitudine commensurabilis ostensa est a g, & ipsi e d longitudine commensurabilis est e f, utpote ipsius dimidia. ¶ 14. X. Ergo a g, e f sunt longitudine incommensurabiles. Quare a h, e k, ¶ 1. VI. ejusdem rationis cum a g, e f ¶ 10. X. incommensurabilia erunt, & proinde l m, m t ipsis equalia incommensurabilia, ipsaeq; rectae o m, m p eandem habentes rationem quam l m, m t, erunt longitudine incommensurabiles. Cum autem eadem sint ostensa rationales. Igitur o m, m p sunt rationales potentia solum commensurabiles. Quare o p potens spaciam a c est irrationalis quae ex binis nominibus dicitur.

Sed Euclides noluit aliquam binomialium speciem determinare, cum posset & prima & secunda, & tertia, quarta, quinta, sexta, esse.

Sequen-

LIBER X.

369

Sequentibus propositionibus quinq; do-
centur inventiones omnis generis Irrati-
onalium linearum.

PROPOS: LVI.

Theorema 38.

Si spacium ac contineatur sub Ra-
tionali ab , & ex binis nominibus se-
cunda, ad , Recta linea op spaci-
um potens, Irrationalis est, quæ ex
binis medijs prima appellatur.

Divisa ad in nomina ae majus, & d minus ad-
hibeatur etiam reliqua precedentis propositionis
constructio. Erit op ex binis medijs prima. Qua-
niam enim ae , d sunt longitudine incommensu-
rabiles, & d rationali ab longitudine commen-
surabile, erunt ae , ab longitudine incommen-
surabiles. Et quia ag , ge in precedenti sunt osten-
se commensurabiles longitudine, tota ae utriq;
ipsarum erit β commensurabilis. Quare cum ae
ecce majus nomen binomialis secunda ad sit linea
Rationalis, erunt & ag , ge rationales longitu-
dine commensurabiles. Sed ae rationali, ab
est longitudine incommensurabilis. Vtraq; ergo ag ,
 ge , eidem ab incommensurabilis γ erit longitudi-
ne. Quare tam ab , ab quam ag , ge rationales
sunt potentia tantum commensurabiles, & re-
AA et angula

13. X.

16. X.

14. X.

- Δ 12. X. Δ angula ah, gi Media, ipsisq³ aequalia quadrata lm, mn Media & om, mp rectæ mediae.
 Quia autem ag, ge sunt longitudine commensurabiles, erunt ah, gi ejusdem rationis, ipsiq³ aequalia quadrata lm, mn commensurabilia, adeoq³ om, mp rectæ potentia tantum commensurabiles. Cumq³ ac, ed , sint longitudine incommensurabiles, quibus longitudine sunt commensurabiles ostense ag, ef : Ergo ag, ef sunt longitudine incommensurabiles, cum quibus in eadem ratione ah, ek , etiam sunt incommensurabilia, & ipsis aequalia lm, mt incommensurabilia; ipsaq³ Δ rectæ ejusdem rationis om, mp longitudine sunt incommensurabiles. Sunt itaq³ om, mp Mediae & potentia commensurabiles. Quia autem ed minus nomen, binomialis secundæ ad , est commensurabile longitudine Rationali ab vel ei , etiam ipsius dimidium ef commensurabile est ipsi ed ; & ei, ef commensurabiles sunt longitudine. Sed ei est Rationalis. Ergo & ef & ek rectang. & rationale. Sed mt sub om, mp contentum ipsi ek est æquale. Ergo & mt est rationale. Quare om, mp sunt Mediae potentia solum commensurabiles, Rationalesq³ continentes; adeoq³ op Irrationalis, quæ ex binis Mediis prima & appellatur.
- Δ 12. X.
 Δ 20. X.
 Δ 38. X.

PRO.

LIBER X.
PROPOS: LVII.

371

Theorema 39.

Si spacium ac contineatur sub Ra-
tionali, ab & ex binis nominibus ter-
tia ad ; Recta linea op spacium po-
tens Irrationalis est, quæ ex binis
Mediis Secunda dicitur.



Divisa ad in nomina ac
majus & ed minus, reliqua
fiant ut in 55. propos. Osten-
detur eodem modo, ut ibi, op
possit spacium ac ; & ut in 56.

rectas om , mp esse Me-
diis potentia tantum com-
mensurabiles, eod quod a & po -
nitur rationali ab hinc ut illic
longitudine incommensura-
bilis. Sed quia ed , ef longi-

tudine sunt commensurabiles, est q_3 ed rationalis
 ab longitudine incommensurabilis, & erit etiam ef 14. X.

idem ab , id est, ei longitudine incommensurabi-
lis. Sunt autem rationalis ef dimidia rationalis

ed & ei potentia tantum commensurabiles. Qua-

re ek erit Medium, ipsiq; æquale mt medium, & 22. X.

contentum sub Medijs om , mp . Quare cum om

mp sint Mediæ potentia tantum commensurabi-

es, contineantq; spacium Mediū, erit op Irrati-

onalis, quæ ex binis Medijs secunda & appel- 39. X.

atur.

44

PRO

Theorema 40.

Si spaciū ac contineatur sub Rationali ab , & ex binis nominibus quarta ad : Recta linea op spaciū potens Irrationalis est, quæ vocatur Major.

Divisa ad in nomina ae majus & minus ed ,
 19. X. cetera sicut ut in 55 propos. a Erunt ag , ge longitudine incommensurabiles. Ostenditurq; op posse spaciū ac . Quoniam ag , ge sunt longitudine incommensurabiles, & ah , gi rectangula eiusdem cum illis rationis & ipsis equalia quadrata lm , mn incommensurabilia erunt, & rectæ om , mp potentia incommensurabiles. Sed quia majus nomen ae Rationali ab est longitudine commensurabile, erit ipsa ae rationalis & rectangulum ai rationale, & ec rectangulum Medium propter ed ipsi ab longitudine incommensurabilem, ipsiq; ec commensurabile ek Medium & huic æquale tm medium. Quare cum om , mp sint incommensurabiles potentia, faciantq; compositum ex ipsarum quadratis lm , mn rationale, rectangulumq; sub ipsis Medium, tota op rationaliserit, quæ appellatur Major.

40. X.

PRO.

LIBER X.
PROPOSITIO LIX.

373

Theorema 41.

Si spacium $a c$ contineatur sub Ra-
tionali, $a b$ & ex binis nominib. quin-
ta $a d$; Recta linea $o p$ spacium po-
tens Irrationalis est, quæ Rationale
& Medium potens appellatur.

Divisa $a d$ in nomina $a e$ majus & $e d$ minus. fi-
unt cetera ut in 55. propos. Erunt $a g$, $g e$ longi- 19. X.
tudine incommensurabiles; & $o p$ poterit ac ut in
5; quæ & Irrationalis erit potens rationale &
& Medium. Erunt etiam ut in 58 $o m$, $m p$
potentia incommensurabiles. Ergo $a i$ est β Me- 22. X.
diū, quia nomē majus $a c$ binomy quinti ad est in-
commensurabile longitudine Rationali $a b$ per defin.
Sed $a i$ quadratis $l m$, $m n$ simul est æquale; Sunt
ergo Media. Rursus rectangulū $e c$ est Rationale,
quia minus nomen $e d$ longitudine cōmensurabile
est Rationali $a b$ ex definitione, ipsiusq; dimidiū
est & Rationale & ipsi æquale m t Rationale, sub 10. X.
 $o m$, $m p$ contentum. Quare cū $o m$, $p m$ sint po-
tentia incommensurabiles, faciantq; ex ipsarum
quadratis $l m$, $m n$ compositum Medium, & re-
ctangulum sub ipsis contentum m t Rationale;
erit $o p$ Irrationalis, quæ Rationale & Me- 24. X.
dium potens dicitur,

Aa 3 PRO.

EYCLIDIS ELEM:
PROPOSITIO LX.

Theorema 4².

Si spaciū ac contineatur sub Rationali ab , & ex binis nominibus sexta, ad , recta linea op spaciū potens, Irrationalis est, quæ bina Media potens appellatur.

¶ 19. X.

Divisa ad in nomina ae majus & ed minus, cetera fiant ut in 55. Erunt ag , eg longitudine incommensurabiles & op poterit spaciū ac . Erunt & om , mp potentia incommensurabiles ut in 58. Compositum ex quadratis lm , mn erit Medium ut in 59: & ut in 58, mt sub om , mp contentum, Medium. Quia verò duarum ae , ef rectarum, illa quidem longitudine est incommensurabilis ipsi ed ; hæc verò commensurabilis; $erunt$ ae , ef longitudine incommensurabiles, Ergò & in eadem cum his ratione ai , ek , sunt incommensurabilia. Quare & compositum ex lm , mn quadratis ipsi ai æquale, & mt ipsi ek æquale erunt incommensurabilia. Quamobrè cum om , mp sint potentia incommensurabiles, faciantq; & ex ipsorum quadratis lm , mn compositum Medium & mt sub ipsis contentum Medium, incommensurabileq; ex ipsarum quadratis compe-

¶ 13. X.

¶ 10. X.

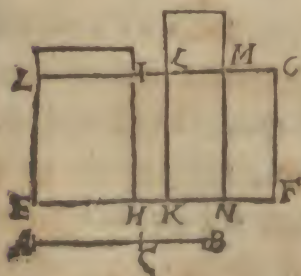
composito, erit tota op δ Irrationalis quæ bina δ 42. X.
Media potens vocetur.

Porro docetur, quasnam Irrationales Latitudines faciant Irrationalium primo Senario propositarum, ad rationalem lineam applicata quadrata.

PROPOS: LXI.

Theorema 43.

Quadratū ejus ab , quæ ex binis nominibus a , c , cb ad rationalem de applicatum df , latitudinem dg facit ex binis nominibus dl , lg primam.



Applicato ad de rectangulo dh quadrato ac equali
& ad ih alio, ik quadrato
 cb equali; a erit lf rectan- a 4. II.
gulo ac bis sumto equali;
Siq; ex puncto m inter lg
medio agatur parallela mn

ipsi de , erit tam ln quam mf equalis ac b re-
ctangulo. & Quoniam itaq; a , c , cb potentia solum b 47. X.
comensurabiles sunt, erunt eorum quadrata ratio-
nalia & commensurabilia, quorū utriq; cum ex ijs
compositum γ sit commensurabile, erit & quadra γ 16. X.
torū a , c , cb compositum dk Rationale, quod ad
Rationalem de applicatū, δ facit latitudinem dl
rationalē, ipsiq; de longitudine commensurabi ē. δ 21. X.

AA 4.

Quis.

- e. 22. X. Quia verò $a c, c b$ sunt Rationales potentia tantum commensurabiles, rectangulum sub ipsis e erit
 § cor. 24. X Medium, & ejusq; duplum $l f$ Medium. Itaq;
 n. 23. X. Latitudo $l g$ est Rationalis, ipsi $l k$, id est, $d e$ longitudine incommensurabilis. Sed $d l$ ipsi $d e$ est
 o. 13. X. ostensa longitudine commensurabilis. o. Ergo $d l$,
 x. 37. X. $l g$ longitudine sunt incommensurabiles, adeoq; rationales potentia solum commensurabiles, & $d g$ ex binis nominibus composita. Erit etiam Prima. Quia enim $a c b$ rectangulum inter quadrata $a c, c b$ λ est medium proportionale, erit $\& l n$ inter $d h, i k$ Medium proportionale, & $l m$ inter $d i, i l$. Itaq; rectangulum $d i l$ quadrato $l m$ est aequale: Et cum quadrata $a c, c b$ sint commensurabilia, & rectæ $d i, i l$ eandem cum illis habentes rationem longitudine sunt commensurabiles. • Et quia $d k$ quam $l f$ est majus, quadrataq; $a c, c b$ rectarum, rectangulo $a c b$ bis sumto sunt major e , & etiam $d l$ quam $l g$ erit major. Itaq; cum $d l$ sit major quam $l g$, & $d i l$ rectangulum quadrato $l m$ ostensum aequale, dividens rectā $d l$ in i in partes longitudine commensurabiles, ut patet \propto poterit $d l$ major plus quam $l g$ minor quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare cum $d g$ sit ostensa ex binis nominibus, & $d l$ majus plus posse, quam $l g$ minus, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; atq; idem $d l$ nomen majus exposit e rationali $d e$ longitudine commensurabile est. erit $d g$ per defin. ex binis nominibus Prima.

P R O.

LIBER X.
PROPOS: LXII.

377

Theorema 44.

Quadrata ejus, quæ est ex binis
 ac , cb , medijs prima ab , ad de Ra-
tionalem applicatum df , Latitudi-
nem $d g$ facit ex binis dl , lg nomi-
nibus secundam.

Repetatur eadem constructio, quæ in præce-
denti est adhibita. Quia ergo ac , cb sunt Medie
potentia tantum commensurabiles, quæ cõtineant. 38. X.
Rationale, erunt earum quadrata Media & com-
mensurabilia, & ipsis equalia dh , ik , media qua-
re & totum dk illis β commensurabile, & Medium;
ipsiusq; Latitudo dl β rationalis ipsi de Longitudi- 16. X.
ne incommensurabilis. Et cum $ac b$ rectangu- 24. X.
lum α sit rationale, ejus etiam duplum β rationa- 23. X.
le erit. Ergo lg Latitudo est rationalis longitu-
dine commensurabilis ipsi ik , id est, de . Cum 21. X.
itaque duarum dl , lg , hæc longitudine sit com-
mensurabilis ipsi de , illa verò incommen-
surabilis, & erunt inter se longitudine incommen- 13. X.
surabiles. Sunt autem & rationales dl , lg ut
patet: Itaq; sunt Rationales potentia tantum com- 37. X.
mensurabiles: & tota $d g$ est ex binis nomi-
bus. Erit etiam secunda. Similiter enim, ut
in præcedenti, ostenditur dl esse nomen majus &
posse plus quàm minus lg quadrato rectæ sibi longi-
tudine

AA. 5 tuding

tudine commensurabilis. Sed ostensum est nomen minus lg esse longitudine commensurabile rationali de posita. \therefore erit igitur dg ex binis nominibus secunda.

PROPOS: LXIII.

Theorema 45.

Quadrata ejus, quæ ex binis medijs secunda ab , ad Rationalem de applicatum df , Latitudinem dg facit ex binis nominibus dl , lg tertiam.

39. X.

16. X.

24. X.

23. X.

3. Lemma

19. X.

10. X.

16. X.

Constructis ijsdem ut in 61, quia ac , cb sunt Media potentia tantum commensurabiles, quæ contineant Medium, erunt eorum quadrata media & commensurabilia; & ipsis equalia dh , ik media, illisq; totum dk & commensurabile & medium. Ergo dl Latitudo est rationalis, ipsi de longitudine incommensurabilis. Et cum acb rectangulum sit Medium, ejus duplum lf erit medium & lg latitudo longitudine d incommensurabilis ipsi lk vel de . Cum verò ac , cb sint longitudine incommensurabiles, sitq; ut ac ad cb , ita quadratum ac ad rectangulum acb , & erunt hæc inter se commensurabilia. \therefore Sed ac quadrato, compositum ex ipsis, id est dk est commensurabile.

ut patet, & rectangulo $ac b$ commensurabile
 est eius duplum $l f$: Ergo $d k$ ipsi $l f$ est incommen-
 surabile, & ipsæq; $d l, l g$ sunt longitudine incommen-
 surabiles: Cumq; etiam rationales, ut patet.
 Ergo $d l, l g$ sunt rationales potentia tantum com-
 mensurabiles, & tota $d g$ ex binis nominibus. \times 37. X.
 Erit etiam tertia. Similiter enim ut in 61
 ostenditur $d l$ esse nomen majus, posseq; plus
 quam minus $l g$, quadrato rectæ sibi longitudine
 commensurabilis. Sed ostensum est neutrum no-
 men $d l, l g$ esse posita rationali de longitudi-
 ne commensurabile. \wedge Erit itaq; $d g$ ex binis \wedge per defini-
 tionibus tertia,

PROPOS: LXIV.

Theorema 46.

Quadratum Majoris $a b$ ad Ratio-
 nalem $d e$ applicatum $d f$, latitudi-
 nem $d g$ facit ex binis nominibus $d l$,
 $l g$ quartam.

Constitutis iisdem ut in 61, quia $a c, c b$ po-
 tentia sunt incommensurabiles, continentes Medi-
 um, faciuntq; compositum ex quadratis suis
 Rationale, erit $d k$ rationale & $l f$ duplum
 rectanguli $a b c$ Medium; adeoque $d l$ & ra-
 tionalis ipsi $d e$ longitudine commensurabilis: β 21. X.

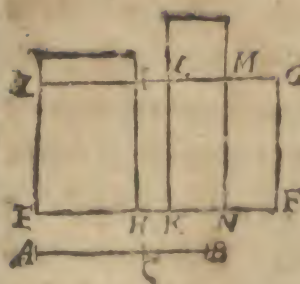
\wedge Sed

23. X. γ Sed l grationis ipsi l k , id est, d e longitudine
 incommensurabilis, ipsaq; d l , l g longitudine in-
 37. X. commensurabiles, δ vel Rationales potentia tan-
 tum commensurabiles & d g binomialis. Erit
 etiam quarta. Quadratum enim l m , ut in 61,
 est æquale rectangulo d l l . Et quia quadrat. a c ,
 c b sunt incommensurabilia, etiam d h i k ipsis
 æqualia sunt incommensurabilia, & d i , i l lon-
 10. X. gitudine incommensurabiles. Ita, ut in 61, osten-
 ditur d l m g l g ; & ad d l applicatum
 rectangulum d l æquale quadrato l m , quod d l
 19. X. dividit ad 1 in partes longitudine incommensura-
 biles. Itaq; l poterit d l plus quàm l g quadra-
 to recte sibi longitudine incommensurabilis. Sed
 majus nomen d l longitudine commensurabile
 per defin. est posite Rationali d e . Erit ergo d g ex bi-
 nis nominibus quarta.

PROPOS: LXV.

Theorema 47.

- Quadratum ejus a b , quæ Medium
 & Rationale potest, ad Rationale d e
 applicatū d f , Latitudinem d g , facit
 ex binis nominibus d l , l g quintam.
 Peractis ceteris ut in 61. quia a c , c b a sunt po-
 41. X. tentia incommensurabiles, facientes quidem ex suis
 quadratis Medium, ac sub se contentum rationale,
 erit



erit dk aequale cōposito qua-
dratorum Medium, & In
duplum rectanguli acb Ra-
tionale. Ergo Latitudo dl
est Rationalis longitudine β
commensurabilis posite de; 323 X.

lg vero Rationalis eidem
longitudine γ commensurabilis; & sic dl, lg sunt
longitudine δ incommensurabiles; & quia Ratio-
nales, sunt Rationales potentia tantum commensurabiles, ex quibus composita dg est ex binis
nominibus & quidē quinta. Rursus enim; ut in
61 ostēditur, dl rectangulū aequale esse quadrato
lm, & ut in 64, dl nomen majus plus posse quam
lg, quadrato recte sibi longitudine incommensura-
bilis Sed minus nomen lg ostensum est posite
Rationali de longitudine commensurabile. Erit
itaq; dg ex binis nominibus quinta. 221 X.
37 X.

PROPOS: LXVI.

Theorema 48.

Quadrata ejus ab, quæ binā Me-
dia potest, ad Rationalem de appli-
catum df, facit Latitudine mdg ex
binis dl, lg nominibus Sextam.

Per actis ceteris ut in 61, quia ac, cb poten-
tia sunt incommensurabiles, & faciunt & ex suis qua-
dratis 42. X.

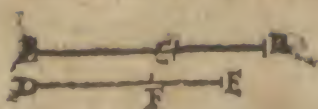
- dratis compositum medium. & sub se contentum Medium, incommensurabileq³ ex quadratis composito, id est, d k composu^o quadratorum equale & l f rectangulo a c b bis sumto equale; erunt Media, & latitudines d l, l g rationales ipsi d e longitudine incommensurabiles. Quoniam verò d k, & incommensurabile est rectangulo a c b, etiam ipsius duplum l f & incommensurabile erit, & ipsaq³ d l, l g, incommensurabiles longitudine, quæ sunt Rationales potentia solum commensurabiles, & ac ob id d g ex binis nominibus, & quidem Sexta. Nam d l, ut in 65; nomen majus plus potest quam l g quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Sed neutrum illorum nominum d l, l g, est ostensum Rationali positæ d e commensurabile longitudine. & Ergò d g est ex binis nominibus Sexta.
- ¶ 23. X.
- ¶ 13. X.
- ¶ 10. X.
- ¶ 37. X.
- ¶ per defin.

PROPOS: LXVII.

Theorema 49.

Ei a b, quæ ex binis nominibus a c, c b Longitudine commensurabilis de, & ipsa ex binis nominibus d f, f e est, atque ordine eadem.

Fiat



* Fiat, ut tota ab ad totam de ; ita ablata ac ad $12. VI.$
 ad ablatam df . Ergo & reliqua cb ad reliquam $19. V.$
 fe erit, ut tota ab ad de totam. Cumq; de
 ipsi ab sit longitudine commensurabilis; & Erit $10. X.$
 & df ipsi ac ; & fe ipsi cb . δ Sunt verò ac , cb $37. X.$
 nomina binomialis ab rationalia. Ergo & df ,
 fe sunt Rationalia. Rursus, cum sit ut ac ad
 df , ita cb ad fe : & permutando, ut ac ad cb ,
 ita df ad fe . Sed ac , cb sunt potentia solum
 comensurabiles. Ergo & df , fe . Atq; ita df ,
 fe sunt Rationales potentia solum commensurabi-
 les, & de ex binis nominibus. Erit & ipsi ab
 ordine eadem. Aut enim ac plus potest, quàm cb ,
 quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; $15. X.$
 Si poterit ac plus quàm cb quadrato rectæ longi-
 tudine commensurabilis, poterit & df quàm fe ;
 atq; si nomē majus ac longitudine commensurabile
 fuerit ipsi Rationali positæ; erit & df & utraq; ab .
 de binomialis prima: Si minus cb etiam fe , &
 utraq; ab , de est binomialis secunda; Si neutrum
 ac , cb vel df , fe erit ex binis nominibus tertia.
 Sed si ac plus possit quàm cb quadrato rectæ sibi
 longitudine incommensurabilis, etiam df quàm
 fe , & ita, ut antea, utraq; vel quarta vel quin-
 ta vel sexta binomialis erit per definitionem.

Scho-

Scholium.

Si *de* binomiali *ab* tantum potentia sit commensurabilis, idem quidem concluditur, sed loco longitudine commensurabilis ubique legendum est potentia commensurabilis, id est, *de* quidem concluditur Binomialis, sed non eadem ordine cum *ab*. In sequentibus autem propositionibus *de* cum *a* semper est eadem, etiam si potentia sint commensurabiles.

PROPOS: LXIIX.

Theorema 50.

Si *ab*, quæ ex binis Medijs, *ac*, *cb*, Longitudine commensurabilis *de*, & ipsa ex binis medijs *df*, *fe* est, atque ordine eadem.

a Fiat ut *a b* ad *d e*, ita ablata *a c* ad ablatum *d f*, & erit etiam reliqua *c b* ad reliquam *f e*, ut tota ad totam. Sed *d e* ponitur ipsi *a b* longitudine commensurabilis; Ergo *d f*, *f e* ipsis *a c*, *c b* sunt longitudine commensurabiles. Sunt autem

¶ 12. VI.

¶ 19. V.

¶ 10. X.

rem $a c$, $c b$ media. d Ergo $\&$ $d f$, $f e$. Rursus cum $d 24. X.$
 sit, ut $a c$ ad $d f$, ita $c b$ ad $f e$, $\&$ permutando, ut
 $a c$ ad $c b$, ita $d f$ ad $f e$; $\&$ f in g , $a c$, $c b$ potentia $38. X.$
 commensurabiles, $\&$ erunt $\&$ $d f$, $f e$. Sunt autem
 $d f$, $f e$ etiam ostense Media; sunt ergo Mediae po-
 tentia tantum commensurabiles, $\&$ $\&$ $d e$ ex binis $38. vel$
 mediis, $\&$ quidem cum $a b$ eodem ordine. Quia e- $39. X.$
 nim est, ut $a c$ ad $c b$ ita $d f$ ad $f e$. $\&$ Sed ut $a c$ ad $c b$, Lemma
 $c b$, ita quadratum $a c$ ad rectangulum $a c b$, $\&$ $39. X.$
 ut $d f$ ad $f e$, ita $d f$ quadratum ad $d f e$ rectangu-
 lum; erit etiam, ut quadratum $a c$ ad rectang.
 $a c b$, ita $d f$ quadratum ad $d f e$ rectang. $\&$
 permutando, ut quadrata $a c$, $d f$, ita rectangula
 $a c b$, $d f e$; Sed $a c$ quadratum quadrato $d f$,
 (quia $a c$, $d f$ sunt longitudine commensurabiles)
 est commensurabile. $\&$ Ergo $\&$ rectangula. Si ergo
 $a c b$ fuerit rationale, erit $\&$ $d f e$ rationale, $\&$
 $d e$ ex binis Medis prima: Si vero Medium. $d e$ cor. $24. X.$
 $\&$ Medium, $\&$ $d e$ ex binis Medis secunda. $\&$ $39. X.$

PROPOS: LXIX.

Theorema 51.

Majori $a b$ commensurabilis $d e$
 $\&$ ipsa $d e$ Major est.



Fiant, quæ in anteceden-
 ti. Quia ergo $a b$, $d e$ lon-
 gitudine vel potentia tan-
 tum

10. X.

tum sunt commensurabiles, & eodem modo tam ac ,
 df , quam ce , fe commensurabiles erunt. Rursus,
 cum sit, ut $a:c$ ad $d:f$, ita cb ad fe : & permu-
 tando, ut $a:c$ ad cb , ita $d:f$ ad fe , β erit, ut qua-

22. VI.

dratum a ad quadratum cb , ita quadratum
 d , ad quadratum f ; & componendo: ut com-
 positum ex quadratis a , c , cb , ad quadratum
 cb ; ita compositum ex quadratis d , f , fe , ad qua-
 dratum fe ; & convertendo, ut quadratum cb ,
 ad compositum quadratorum a , c , cb , ita quadra-
 tum f ad compos. Quadratorum d , f , fe . Sed cb
 quadratum, quadrato f e est commensurabile,
 quia ipsa recte vel longitudine vel potentia sunt
 commensurabiles: & Ergo & compositum qua-
 dratorum a , c , cb , composito quadratorum d ,
 f , fe commensurabile erit. & Sed compositum illud
 est Rationale, quia recta a , c , cb , componunt Ma-
 jorem ab . & Igitur & hoc est Rationale. Rur-
 sus quia est, ut $a:c$ ad cb , ita $d:f$ ad fe , ut in pre-
 cedenti; rectangulo ac , cb , rectangulum df , fe o-
 stenditur commensurabile; Illudq; cum sit, & Me-
 dium, erit & hoc Medium. Sed cum sit, ut $a:c$ ad
 cb , ita $d:f$ ad fe ; & sintq; a , c , cb , potentia
 incommensurabiles, & erunt & d , f , & fe . Itaq;
 cum d , f , fe potentia sint incommensurabiles, sci-
 ciantq; ex earum quadratis compositum Rationa-
 le; quod verò sub ipsis continetur, Medium; & erit
 tota de Major.

40. X.

9. defin.

PRO-

PROPOSITIO LXX.

Theorema 52.

Rationale ac Medium potenti $a b$ commensurabilis $a e$, & ipsa $d e$ Rationale ac Medium potens est.

Constructis *hysdem*, ut prius, etiam ut in precedenti compositum ex quadratis $a c$, $c b$ compositum ex quadratis $d f$, $f e$ commensurabile esse ostenditur. Sed illud compositum est \propto Medium: *Er- 41. X.*
gor. 24. X.
 go & hoc. Eodemq; modo rectangulo $a c b$ Rationali commensurabile & Rationale erit Rectangulum $d f e$, & $d f$, $f e \propto$ potentia incommensurabiles. Itaq; tota $d e$ Rationale ac Medium potens \propto erit, (propter affectiones ipsi competentes.)

PROPOSITIO LXXI.

Theorema 53.

Bina Media potenti $a b$ commensurabilis, $d e$, & ipsa $d e$ bina Media potens est.

Constructis *hysdem*, ut prius, etiam ut antea, compositum ex quadratis $a c$, $c b$ compositum ex quadratis $d f$, $f e \propto$ commensurabile & Medium *42. X.*
 esse ostenditur: & rectangulo $a c b$ Medio commensurabile, & Medium rectangulum $d f e$. \propto Sunt vero $d f$, $f e$ potentia incommensurabiles; ut prius.

*R b 2**Deniq;*

42. X. α Deniq³ cum quadratorum $a c$, $c b$ composito rectangulum $a c b$ sit incommensurabile: sed composito quadratorum $a c$, $c b$, rectanguloq³ $a c b$ commensurabilia sunt compositum quadratorum $d f$, $f e$, & rectangulum $d f e$; β erit etiam compositum quadratorum $d f$, $f e$ incommensurabile rectangulo; α Eritq³ $d e$ bina Media potens.

Propositionibus duabus exponit aliam differentiam Senarij primi sex Irrationallium. Vocantur autem hæcenus proposita Senaria per compositionem, quod signo + componantur nomina: Sed à 74 sequuntur Senaria per detractionem, quia per signum, —, subducentur nomina. De quibus eadem quæ in illis docentur.

PROPOSITIO LXXII.

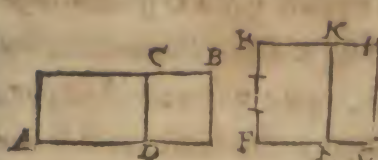
Theorema 54.

Si Rationale $a c$ & Medium $a b$, componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus; vel quæ ex binis Medijs prima; vel Major; vel Rationale ac Medium potens.

Erit $a c$ quàm $d b$ vel majus vel minus: æquale enim

LIBER X.

209



le esse nequit, quia
db æquale rationali ac.
foret Rationale. Sit ergo
Majus. Applicetur ad ra-
tionalem ef, eh æquale

ipsi ac; & kg æquale ipsi db, ut totum ti sit æ-
quale toti ab. Erit ek rationalis ipsi ef longi- 21. X.
tudine commensurabilis β, sed ki rationalis eidem β 23. X.
longitudine incommensurabilis. Rursus quia eh ra-
tionale & hi Mediū sunt incommensurabilia, erūt
in eadem ratione e k, ki, longitudine γ incom- γ 10. X.
mensurabiles. Itaq; ex Rationalibus potentia in-
commensurabilibus composita ei d erit binomialis. d 37. X.
Sed cum a c quàm d b ponatur majus, eh quàm
hi, γ erit etiam ek major quàm ki. Iam majus
nomen ek plus poterit, quàm minus ki quadrato
rectæ sibi longitudine commensurabilis vel incom-
mensurabilis. Si ek plus potest quàm ki qua-
drato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Sit q;
ek nomen majus rationali ef commensurabile lon-
gitudine, ut patet, erit ei per defm. ex binis no-
minibus prima. Itaq; recta potens spaciū eg,
ipsi ab æquale, sub rationali ab & binis nomi-
nibus prima ei contentum: erit Irrationalis, 58. X.
quæ ex binis nominibus dicitur.

Si verò ek plus potest quàm ki, quadrato re-
ctæ sibi longitudine incommensurabilis; sit q; ek
posita rationali ef longitudine commensurabilis,
erit ei ex binis nominibus quarta per defm. Quare

Bb 3

recta

¶ 58. X.

recta potens eg spaciū aequale ipsi a b spacio, contentum sub Rationali ef & ei ex binis nominibus quarta & Irrationalis est, quæ vocatur Major. Sit jam ac majus Irrationale & Medium; db vero minus Rationale, constructis iisdem, erit ek longitudine ipsi ef incommensurabilis, & ki commensurabilis, adeoque ek , ki rationales potentia tantum commensurabiles, & ei ex d binis nominibus. Itaque ek nomen majus plus potest, quam minus ki , quadrato rectæ sibi longitudine vel commensurabilis vel incommensurabilis. Si commensurabilis, sitque ek rationali ef posita incommensurabilis, erit ei ex binis nominibus secunda. Quare recta potens spaciū eg , sive a b , sub rationali ef & ei ex binis nominibus secunda, contentum, Irrationalis est quæ ex binis Medijs prima appellatur.

¶ 56. X.

Si commensurabilis, erit ei ex binis nominibus quinta. Quare recta potens spaciū eg sive a b sub rationali ef , & ex binis nominibus quinta ei contentum, Irrationalis, est, quæ Rationale ac Medium potens dicitur.

¶ 59. X.

PROPOSITIO LXXII.

Theorema 55.

Si duo Media, ac , db inter se incommensurabilia componantur, duæ reli-

reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Medijs secunda, vel bina Media potens.

Adhibita præcedentis constructione, erit a o
quàm d b vel majus vel minus, & nullo modo
aqualis, quia contra hypoth. sin forent commensu-
rabilia. Cum ergo a c, d b ponantur spacia Me-
dia, æ erunt ipsis aqualia e h, h i media; quare 10. X.
e k, k i æ ejusdē rationis rationales & longitudine 11. VI.
& incommensurabiles sunt ipsi e f positæ, & ex e k 13. X.
k i rationalibus potentia tantum commensurabi. 17. X.
libus compositæ e i est ex d binis nominibus. Cumq;
a c quàm d b ponatur majus, erit e k nomen ma-
jus, k i minus. Itaq; e k plus poterit quàm k i
quadrato rectæ sibi longitudine vel commensura-
bilis vel incommensurabilis. Si commensurabilis,
& utrumq; sit rationali expositæ incommensura-
bile, erit e i ex binis nominibus tertia: Quare
recta potens spaciū e g quod a b est æquale con-
tentum sub rationali e f & ex binis nominibus ter-
tia, irrationalis est, quæ ex binis Medijs se- 15. X.
cunda dicitur. Si incommensurabilis, & u-
trumq; e k, k i incommensurabile ipsi e f positæ,
erit e i ex binis nominibus sexta. Quare recta
potens e g spaciū sub rationali e f & binomiali
sexta e i contentum, irrationalis est, quæ 2 bina 60. X.
Media potens vocatur.

R. b. 4.

Corollā.

Corollarium.

Ex his colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquas ipsam subsequentes Irrationales, neq; Mediæ, neque inter se easdem esse.

- Nam quadratum Mediæ ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit rationalem, ipsi Rationali longitudine incommensurabilem. At Quadratum ejus, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit ex binis nominibus primam. Et quadratum ejus, quæ est ex binis Medijs prima, ad rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam. Quadratum deinde ejus, quæ ex binis medijs secunda ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. At Quadratum Majoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam. Quadratum verò ejus, quæ Rationalem & Medium potest, ad rationalem applicatum, facit latitudinem ex binis nominibus quintam. Postremò quadratum ejus, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam. Itaq; cum hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ & inter se; à latitudine quidem Mediæ, quòd hæc sit Rationalis; ille verò Irrationales; inter se verò, quod ordine non sint eadem

eodem ex binis nominibus, perspicuum est, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus est dictum, inter se differentes esse.

Hactenus itaque de 7. Senarijs est actum. In primo à 37, ad 42. docuit Euclides ortum sex Irrationalium. In secundo à 43. ad 48. docuit earum divisiones in uno puncto. In tertio à 49. ad 54. docuit inventionem Sex binomialium. In quarto à 55 ad 60. ostendit, quomodo primi Senarij sex irrationales differant, docens, quæ sit illa irrationalis, quæ potest spaciū contentum sub Rationali & binomiali prima, secunda &c. In quinto à 61. ad 66. docuit, quas latitudines irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium primo Senario explicatarum ad rationalem lineam applicata. In sexto à 67. ad 71. ostendit commensurabilem alicui Irrationalium esse eandem cum illa. In 70. duabus propositionibus 72 & 73 aliam differentiam sex illarum linearum docuit.

Sequuntur jam 7 alij Senarij, in quibus Euclides demonstrat eadem de sex alijs Irrationalibus lineis, quæ per detractionem generantur, quæ hactenus de Irrationalibus per compositionem factis docuit.

Principium Senariorum per Detractionem.

PROPOSITIO LXXIV.

Theorema 56.

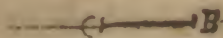
B b 5

Si

Si à Rationali $a b$ Rationalis $a c$
 auferatur potentia tantum com-
 mensurabilis existens toti; Reliqua
 $b c$ Irrationalis est. Vocatur autem
 Apotome.

3. Lemma

39. X.



a Quia enim est ut ab ad

ac , ita quadratum $a b$ ad

10. X.

$b a c$ rectangulum; Sunt q^{ue} $a b$, $a c$ longitudine in-
 commensurabiles, β erunt quadratum $a b$ & $b a c$
 rectangulum incommensurabilia. Sed quadrato

16. X.

$a b$ compositum ex quadratis rectarum $a b$, $a c$ est
 commensurabile, quia lineæ illæ sunt potentia

14. X.

commensurabiles; & rectangulo $b a c$ suum du-
 plum est commensurabile, δ Compositum itaq^{ue} ex
 quadratis $a b$, ac , & rectangulum $b a c$ bis sum-
 tum sunt incommensurabilia. Sed compositum ex
 quadratis rectarum $a b$, $a c$ est. ϵ quale rectangu-
 lo $b a c$ bis sumto unà cum quadrato $b c$. Itaq^{ue}

17. II.

2 cor. 17. X.

Compositum ex quadratis rectarum $a b$, $a c$ reli-
 quo quadrato $b c$ est ζ incommensurabile. Cum itaq^{ue}
 ex rectarum $a b$, $a c$ quadratis compositum sit ratio-
 nale, utpote commensurabile quadrato ab Rationali,
 erit $b c$ Irrationale & ipsa $b c$ Irrationalis. Vocetur
 autem Apotome, Resecta vel Residuum.

PROPOSITIO LXXV.

Theorema 57.

Si à Media $a b$, Media $a c$ auferatur
 potentia tantum commensurabilis
 existens

existens toti, quæ cū tota Rationale
 bac contineat; Reliqua cb Irratio-
 nalis est. Vocetur autem Mediæ A-
 potome prima.

Cum a, b, ac sint potentia commensurabiles, e-
 arum quadrata commensurabilia erunt, & ex
 quadratis compositum quadrato ac = commensu- ^{16. X.}
 rabile. Sed quadratum ac Mediæ est Irratio-
 nale & Medium. Ergo & compositum ex quadra- ^{cor. 24. X}
 tis a, b, ac . Et cum bac rectangulum ponatur
 rationale, ejus etiam duplum erit rationale. Itaq;
 compositum ex quadratis & rectang. bac bis sum-
 tum sunt incommensurabilia. Sed compositum ex
 quadratis; a, b, ac est & æquale rectangulo bac ^{7. II}
 bis sumto cum quadrato b, c . Itaq; rectang. bac
 bis cum quadrato b, c incommensurabile erit re-
 ctangulo bac bis sumto. & rectangulum bac bis
 incommensurabile est quadrato b, c . Sed bac re-
 ctangulum est rationale. Ergo quadratum cb est
 Irrationale & recta cb Irrationalis, quæ vocetur
 Mediæ Apotome prima (quia relinquitur post
 detractationem Minoris nominis lineæ ex binis
 Medijs primæ, à majori nomine.)

PROPOS: LXXVI.

Theorema. 58.

Si à Media b Media ac auferatur poten-
 tia tantum commensurabilis existens toti,
 quæ cum tota Mediâ bac contineat; Reli-
 qua bc Irrationalis est. Vocetur autem Me-
 diæ Apotome secunda. Quæ



Quoniam quadrata ab ,

a c potentia commensura-

16. X.

bilia sunt commensurabilia; erit & compositum ex ipsis utriq³ ipsorum a commensurabile. Sed utrumq³ super Medijs est Medium. Ergo utriq³

cor. 24. X

commensurabile compositum est & Medium. Quia verò rectangulum b a c ponitur Medium, ejus etiam duplum erit Medium. Sed compositum ex quadratis a b , a c r aequale est rectangulo b a bis sumto cum quadrato b c . Compositum ergo ex

7. II.

quadratis Medium est majus rectangulo b a c bis sumto Medio, quadrato b c . δ Sed Medium non superat Medium rationali. Itaq³, quadratum b c

17. X.

non est rationale, ipsaq³ b c linea irrationalis quæ vocetur Mediæ Apotome secunda.

PROPOS: LXXVII.

Theorema 59.

Si à recta ab linea recta a c auferatur, potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum Quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur b a c Medium: Reliqua b c Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

Quo-

Quoniam compositum ex quadratis ab , ac est
 Rationale, & rectangulum bac Medium, etiam
 hujus rectanguli duplum α Medium erit vel Irra-
 tionale; Compositum vero ex quadratis ab , ac β α cor. 24. X
 incommensurabile rectangulo bac bis sumto. Sed β 10. def.
 Compositum quadratorum ab , ac , γ γ 7. II.
 rectangulo bac bis sumto cum quadrato bc . δ cor. 17. X
 Erit itaq; compositum quadratorum incommen-
 surabile quadrato bc . Sed compositum qua-
 dratorum est Rationale. Ergo quadratum bc est
 Irrationale, ipsaq; bc Irrationalis, quæ vocetur
 Minor.

PROPOSITIO LXIIIX.

Theorema 60.

Si à recta ab recta ac auferatur po-
 tentia incommensurabilis existens
 toti, quæ cum tota faciat compo-
 situm quidem ex ipsarum ab , ac Qua-
 dratis Medium; quod autem sub ipsis
 continetur Rationale bac . Reliqua
 c Irrationalis est. Vocetur autem
 Medium Rationali medium totum efficiens.

Quoniam compositum ex quadratis rectarum
 b , a est medium vel Irrationale, & compre-
 hensum sub ipsis bac rationale, sicut & ipsius du-
 plum;

10. def.

7. II.

17. X.

plum: a erunt compositum quadratorum & rectangulum bac bis sumtum incommensurabilia. sed compositum ex quadratis est rectangulo bac bis sumto, cum quadrato bc , β aequale. Itaq, rectang. bac bis sumtum cum quadrato cb rectangulo bac bis sumto est γ incommensurabile: & rectangulum bac bis, quadrato bc incommensurabile. Cum itaq, bac rectangulum sit Rationale, erit quadratum bc irrationale, ipsaq, recta bc Irrationalis, quæ vocetur cum Rationali medium totum efficiens.

PROPOSITIO LXXIX.

Theorema 61.

Si à recta ab recta ac auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis ab , ac , Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium bac , incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: Reliqua bc Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

7. II.

Quoniam ex quadratis rectarum a b , a c , compositum α aequale est rectangulo bac bis sumto cum quadrato bc ; superabit compositum ex quadratis Medium, rectangulum bac bis sumtum β Medi-

um

in quadrato bc . Sed medium non superat Medium Rationali. Itaq; b c erit Irrationale, ipsaq; β cor. 24. X
 c Irrationalis, quæ vocetur cum Medio Medium totum efficiens. γ 27. X.

LEMMA.

Si idem excessus i b sit inter primam ab magnitudinem & secundam cd , qui k sit inter tertiam ef magnitudinem & quartam gh ; erit & vicissim idem excessus k sit inter primam ab magnitudinem & tertiam ef , qui inter secundam cd magnitudinem & quartam gh .

Quoniam i b est excessus inter ab , cd ; erunt ai , cd æquales; ut & ek , gh . Erit ergo idem excessus inter ai & ek , qui inter cd & gh , cum magnitudines singula singulis sint æquales. Est autem totorum ab , ef excessus idem, qui inter ai , ek ; qui ib & kf ponuntur æquales. Idem itaq; erit excessus inter ab , ef , qui inter cd & gh .

Corollarium.

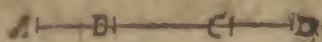
Hinc constat: Quatuor magnitudines Arithmeticam analogiam habentes, vicissim quoq; Arithmeticā analogiam habere. Hac enim in excessu eodem cōsistit, quem jam ostendimus.

PRO-

EVCLIDIS ELEM:
PROPOS: LXXX.

Theorema. 62.

Apotomæ a b una b c tantum congruit recta linea Rationalis potentia solum commensurabilis existens totia c .



- Congruat ipsi a b, si potest, alia Rationalis b d, totia d potentia solum commensurabilis. Quia b c est rationalis, erit a c illi potentia solum commensurabilis rationalis: Sunt ergo a c, b c potentia tantum commensurabiles, ut & a d, b d. Cum vero idem sit excessus, inter compositum ex quadratis rectarum a c, b c & rectangulum a c b bis sumtum, qui inter compositum ex quadratis rectarum a d, b d, & rectangulum a d b bis sumtum,
- α 7 II. α quia utrumq, superat utrumq, quadrato a b; β
β Iem. 79. X erit permutando etiam idem excessus compositorum ex quadratis a c, b c, & a d, b d, qui re-
- γ 27. X. ctangulorum bis sumptorum a c b & a d b. γ Est autem excessus inter illa composita spaciū rationale, quod utrumq, sit rationale. Igitur & excessus bis sumptorum rectangulorum est spaciū rationale. Sed cum a c, b c sint rationales potentia solum commensurabiles, δ erit rectangulum a c b medium,

medium, & ejusq; duplum medium. Sic eadem de causa a d b rectangulum bis erit medium. cor. 24. X. Sed medium non superat Medium rationali. Ergo excessus rectangulorum a c b & a d b, id est, quadratum ex a b erit spaciū Medium, id est, Irrationale, quod tamen modò rationale ostendebatur. Quod absurdum.

PROPOSITIO LXXXI.

Theorema 63.

Mediæ Apotomæ primæ a b una b c tantum congruit recta linea Media, potentia solum commensurabilis existens a c toti, & cum tota Rationale a c b continens.

Congruat ipsi a b alia b d. Quia b c est Media ipsi a c potentia solum commensurabilis, a erit & a 24. X. ac, media, & ac, c b Media potentia solum commensurabiles. Quoniam verò inter compositum quadratorum a c, b c, & compositum quadratorum a d, b d idem est excessus, nempe quadratum a b, qui inter rectangula a c b & a d b quovis bis sum. Schol. 27. X. Sed excessus rectangulorum & est spaciū rationale. Ergo & excessus compositorum ex quadratis. Sed cum a c, b c sint Mediæ potentia solum commensurabiles, erunt ipsarum quadrata

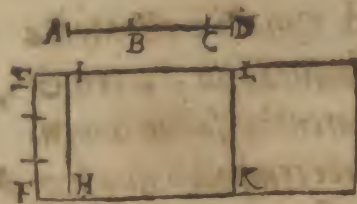
C c

246. X. *drat. a commensurabilia & compositum ex ipsis utriq;*
 cor. 24. X *ipforum & commensurabile atq; ob id & Medium.*
 247. X. *Nec aliter Medium erit compositum quadrato-*
rum a d, b d. Sed Medium non superat Medium
rationali. Ergo excessus compositorum ex quadra-
tis erit Medium Irrationale, quod modo osten-
debatur Rationale. Quod absurdum.

PROPOSITIO LXXXII.

Theorema 64.

Mediæ Apotomæ Secundæ ab ,
 unâ bc tantum congruit recta linea
 Media potentia solum commensu-
 rabilis existens toti ac , & cum tota
 Medium acb continens.



Congruat ipsi ab , si
 potest, alia bd ; & ad
 Rationalem ef applice-
 tur rectangulum ek æ-
 quale composito quadra-
 torum $a c, b c$ & aliud eh æquale quadrato ab ,
 & aliud cg æquale composito quadratorum $a d$,
 $b d$. Quoniam itaque compositum ex quadraticis
 rectarum $a c, b c$, rectangulo acb bis sumto cum
 quadrato ab æquale est; erit ik æquale re-
 ctangulo acb bis sumto, & ig æquale rectan-
 gulo

247 II.

gulo adb bis sumto. Cumq; ac, bc sint Medie
 potentia cōmensurabiles & erunt earum quadrata \S 24. VI.
 Media & cōmensurabilia, & atq; ex ipsis com- γ 16. X.
 positum utriq; eorum cōmensurabile & d Medi δ cor. 24. X
 um. Igitur & ek , composito illi aequale, erit
 Medium. Quod cum sit applicatum ad Rationa-
 lem ef , erit fk rationale ipsi ef longitudine, γ 23. X.
 incommensurabilis; neq; aliter hk rationalis est
 ipsi ef longitudine incommensurabilis. Et quia
 ac, bc longitudine sunt incommensurabiles, &
 est, ζ ut ac ad bc , ita quadratum ac ad rectan- \S 3. Lemma
 gulum acb , erit quadratum ac rectangulo γ 19. X.
 acb incommensurabile. Sed quadrato ac com- γ 10. X.
 positum ex quadratis ac, bc est cōmensurabile,
 id est, ek rectangulum; & acb suum duplum,
 id est, ik rectangulum cōmensurabile: Ergo ek ,
 ik sunt incommensurabilia; atq; sic fh, hk re- γ 14. X.
 ctæ & incommensurabiles. Quæ cum sint ostense
 rationales: erunt fh & hk rationales poten-
 tia solū cōmensurabiles. Cum ergo ex Ra-
 tionali fk auferatur rationalis hk ipsi fk poten- γ 74. X.
 tia tantum cōmensurabilis, erit fh Apotome
 & illi congruens hk . Similiter ostendetur fh a-
 potome, illiq; congruens hg . Atq; ita apotoma
 fh non una tantum congruet recta potentia so-
 lū cōmensurabilis existens toti. Quod λ ab- λ 80. X.
 surdum.

EUCLIDIS ELEM:
PROPOS: LXXXIII.

Theorema 65.

Minori ab una tantum congruit
recta linea bc potentia incommen-
surabilis existens tota ac , & cum to-
ta faciens compositum quidem ex
ipsarum ac, bc quadratis Rationale;
quod autem sub ipsis continetur,
Medium acb .



Congruat ipsi $a b$. si po-
test, alia $b d$. Quoniam,

ut in 80. propos. idem est excessus compositorum ex
quadratis ac, bc & ex quadratis ad, bd qui in-
ter rectangula acb , & adb quolibet bis sumto; Sed
excessus compositorum ex quadratis est Rationale,
quia utrunq; ponitur rationale. Ergo & excessus
rectangulorum acb & adb est spacium Ratio-
nale. Idem vero etiam est non rationale, quia re-
ctangula ponuntur Media, β quae se non excedunt
rationali. Ne ergo absurdum hoc sequatur, vera
erit propositio.

PROPOS: LXXXIV.

Theorema 66.

Ei ab , quae cum Rationali Medi-
um to-

tum facit, una tantum congruit recta linea bc potentia incommensurabilis existens toti ac , & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur ac & b Rationale.

Præstet hoc, quod bc , alia bd . Quoniam ut in 80. propos. idem est excessus compositorum ex quadratis ac , bc , & ex quadratis ad , bd , qui inter rectangula acb & adb quolibet bis sumto, Sed inter hæc rectangula, ut in 81. propos. spacium est rationale. Igitur & compositorum ex quadratis excessus est spacium rationale. Sed idem etiam est non rationale, quia utrumque est medium quæ se non excedent rationali. Ne ergo 27. X. absurdum hoc sequatur, vera erit propositio.

PROPOS. LXXXV.

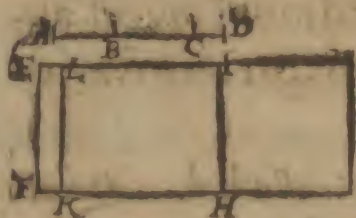
Theorema 67.

Ei ab , quæ cum Medio Medium totum facit, una tantum congruit recta linea bc potentia incommensurabilis existens toti ac , & cum tota faciens & compositum ex ipsarum

CC 3

rum

rum Quadratis Medium, & quod sub
 ipsis continetur $ac b$ Medium, in-
 commensurabileq; compositio ex
 ipsarum Quadratis.



Præstet hoc, si potest,
 quod bc , alia bd ; ea-
 demq; adhibeatur con-
 structio, quæ in 82. Quo-
 niam compositum ex qua-
 dratis ac , bc , est Medium; ipsi æquale, ek erit

¶ 13. X.

Medium, & recta fh rationalis ipsi ef longitudine
 incommensurabilis. Rursus cum $ac b$ rectangu-
 lum sit Medium, & ipsius duplum, id est, ik Me-
 dium; erit & recta hk Rationalis longitudine
 incommensurabilis ipsi ef rationali. Et quoniam
 ik rectangulo $ac b$, tanquam duplum, est com-
 mensurabile, quod rectangulum $ac b$ incommensu-
 rabile ponitur composito ex quadratis, ac , bc ,
 id est, ipsi eh , erit ik eidem composito eh in-
 commensurabile, & recta fh , hk , eandem ha-
 bentes rationem, longitudine γ incommensurabi-
 biles. Quæ cum etiam sint Rationales. Erunt
 ergo rationales potentia solum commensurabiles.
 Quare cum ex fh rationali auferatur rationa-
 lis hk , d' erit fk apotome, & ipsi congruens hk .
 Nec aliter ostendemus fk esse apotomen, &
 ipsi

¶ 14. X.

¶ 10. X.

¶ 74. X.

ipsi congruentem h k, unde fieret, ut Apotoma u-
ni non una tantum congrueret. Quod ab-
surdum.

110. X.

Definitiones

Tertiar.

Exposita Rationali & Apotoma;
si tota plus possit quàm congruens, qua-
drato rectæ lineæ sibi longitudine com-
mensurabilis.

1 Si quidem tota expositæ Ratio-
nali sit longitudine commensurabi-
lis; vocetur Apotome prima.

2. Si verò congruens expositæ
Rationali sit longitudine commen-
surabilis; vocetur Apotome Se-
cunda.

3. Quod si neque tota, neque con-
gruens expositæ Rationali sit lon-
gitudine commensurabilis; vocetur Apotome tertia.

Cc 4

Rursus

Rursus si tota plus possit, quàm congruens quadrato recta linea sibi longitudine incommensurabilis.

4. Siquidem tota exposita Rationali sit longitudine commensurabilis; vocetur Apotome Quarta.

5. Si verò congruens exposita Rationali sit longitudine commensurabilis; vocetur Apotome Quinta.

6. Quod si neque tota, neq; congruens exposita Rationali sit longitudine commensurabilis, vocetur Apotome Sexta.

PROPOSITIO LXXXVI.

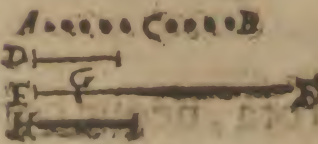
Problema 19.

Invenire primam Apotomen.

2. Schol.

29. X.

cor. 6. X.



Inventis duobus nu-

meris quadratis ab , bc

quorū excessus ac sit non

quadratus, assumptaq; Ra-

tionali d , & ipsi longitu-

dine commensurabili ef sit, ut ab sit, ut ab ad ac ,

sic a quadratum ef ad quadratū gf non secus ac

in 42. X. Erit eg Apotome, Quoniam quadrata ef ,

gf sunt

$g f$ sunt, ut numeri $a b$, $a c$, & erunt potentia sal-
 tem commensurabiles recta $e f$, $g f$. Sed $e g$ est 26. X.
 rationalis, quia posita d rationalis longitudine est
 commensurabilis. Ergo & $g f$ est rationalis. Cum
 vero $a b$ & $a c$ proportio non sit numerorum qua-
 dratorum, & erunt $e f$, $g f$ longitudine incommensura-
 biles & sic $e f$, $g f$ recta potentia tantum commen-
 surabiles: Reliqua igitur Apotome, & quidem
 prima. Possit enim $e f$ plus quam $g f$ quadra-
 te recta h : Quia est ut numerus $a b$ ad numerum
 $a c$, ita quadratum $e f$ ad quadratum $g f$; erit &
 convertendo, ut $a b$ ad $c b$ ita quadratum ex $e f$, ad
 quadratum ex h . Sed $a b$, $c b$ habent rationem
 quadratorum. Ergo & quadrata $e f$ & h , & sic
 $e g$ & h sunt longitudine & commensurabiles. Quoni-
 am igitur tota $e f$ plus potest, quam congruens
 $g f$, quadrato recta h sibi commensurabilis longi-
 tudine erit $e g$ per defin. Apotome prima. 74. X.

PROPOS: LXXXVIII.

Problema 20.

Invenire Secundam Apotomen.

Fiant omnia ut in 50. propof. Erit $e g$ Apotome
 Secunda. Quoniam enim quadrata $g f$, $e f$ pro-
 portionem habentia numerorum $a c$, $a b$ commen-
 surabilia sunt, & erunt recta $g f$, $e f$ commensura-
 biles. 26. X.
C c s

p. 9. X.
747. X.

biles saltem potentia. Sed gf est rationalis, quia
posita rationali d commensurabilis longitudine;
erit ergo e etiam Rationalis, & quia ac , ab ,
& si quadrata gf , ef . proportionem non habent
quam numeri quadrati: $erunt$ recte gf , ef
longitudine incommensurabiles & sic rationales
potentia solum commensurabiles. γ Ideoq; e g
reliquum est Apotome: & quidem Secunda.
Posset enim e f plus quam gf , quadrato h : erit ut in
antecedenti h ipsi e f longitudine commensurabi-
lis. Quare cum tota e f plus possit. quam con-
gruens gf , quadrato recte h sibi longitudine com-
mensurabilis, erit eg Apotome Secunda.

PROPOSITIO LXXXIIX.

Problema. 21.

Invenire Tertiam Apotomen.

IIIVXXX

A.....C.....

I.....

D.....

E.....F.....

H.....

Fiant omnia, ut in si. Erit
 eg Apotome. Quoniam enim
quadrata e f , gf proportionem
habentia numerorum a b , a c ,
commensurabilia sunt; erunt e g ,
 gf recte commensurabiles saltem potentia: & quia
 ef rationalis, erit & gf rationalis. Quia vero ab ,
 ac & si quadrata eg , gf proportionem non ha-
bent, quadratorum numerorum, $erunt$ ef , gf
longi-

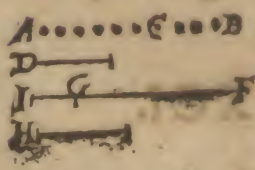
9. X.

longitudine incommensurabiles & sic rationales
 potentia solum commensurabiles. β Ideoq; c g re-
 liqua Apotome est, & quidem Tertia. Quo-
 niam est, ut i ad ab, ita quadratum d ad ef; & ut β 74. **X**
 a b ad a c ita quadratum e f ad quadratum g f;
 erit ex aequo; ut i ad a c ita quadratum d ad qua-
 dratum g f. Sed i & a c non habent rationem
 numerorum quadratorum; ergo nec d & g f;
 & sic d & g f recte sunt longitudine incommen-
 surabiles. Neutra igitur ipsarum e f, g f posita
 rationali d longitudine commensurabilis est. Pos-
 sit eam e f plus quam g f quadrato recte h sibi lon-
 gitudine commensurabilis; erit, ut in 86. h ipsi
 e f longitudine incommensurabilis. Quare, cum
 e f plus possit quam g f (neutra earum posita ra-
 tionali existente commensurabili) quadrato recte
 h sibi longitudine commensurabilis; erit e g ex
 definitione Apotome tertia.

PROPOSITIO LXXXIX.

Problema 22.

Invenire Quartam Apotomen.

 Fiant omnia, ut in 52. Erit;
 ut in 86, e g Apotome; &
 quidem quarta. Posit enim e f
 plus quam g f quadrato recte h.
 Quia

89. X.

Quia ergo est, ut $a b$ ad $a c$, ita quadratum $e f$ ad quadratum $g f$; erit convertendo, ut $a b$ ad $c b$ ita quadratum $e f$ ad quadratum h . Cum itaque $a b, c b$ non habeant proportionem numerorum quadratorum, erunt $e g$ & h recte longitudine incommensurabiles. Quoniam itaque tota $e f$ posita rationali existens commensurabilis longitudine, plus potest quam $g f$ quadrato recte h sibi, longitudine commensurabili, erit $e g$ ex definit. Apotome Quarta.

PROPOS: XC.

Problema 23.

Invenire Apotomen Quintam.

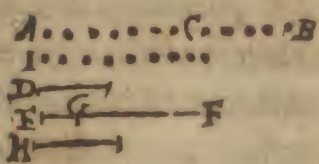
Fiant omnia ut in 53. Erit, ut in 87. $e f$ Apotome; & quidem Quinta. Possit $e f$ plus quam $g f$ quadrato recte h . Et quia similiter ut in 86. ostendimus per conversionem rationis. esse, ut $a b$ ad $c b$; ita quadratum $e f$ ad quadratum h ; erunt rursus, ex 89. recte $e f$ & h incommensurabiles longitudine: Estque congruens $g f$ rationali posita & longitudine commensurabilis. Ergo ex definitione $e g$ Apotome Quinta.

PROPOS: XCI.

Problema 24.

Inve

Invenire Apotomen Sextam.



Fiant omnia ut in 84.

Erunt, ut in 83. d & e f

longitudine commensura-

biles & e g Apotome. eaq;

Sexta. Nam d & g f sunt

longitudine incommensurabiles, adeoq; neutra ipsarum e f, f g commensurabilis exposita rationali d. Possit e f plus quàm g f quadrato rectæ h, quæ ut in 89, ipsi e f longitudine incommensurabilis est. Est ergo e f ex definitione Apotome Sexta.

Scholium.

Theon invenit Apotomas prom-
tius, subductis binomiorum nomi-
nibus minoribus ex majoribus; atq;
ita apotomarum ordo respondet or-
din i binomiorum.

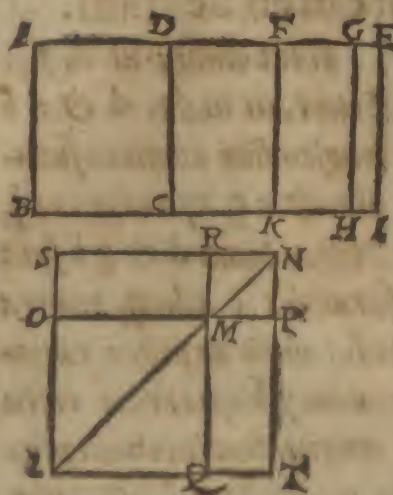
PROPOS: XCII.

Theorema 68.

Si spacium *a c* contineatur sub Ra-
tionali *a b* & Apotoma prima *a d*,
recta linea *a o m* spacium potens, Apo-
toma est.

Ipsi a d congruat d e, & erunt ex definitione

apoto-



Lemma
17. X.

18. X.

16. X.

12. X.
6. def.

10. X.

14. X.

22. X.
14. II.
16. VI.

apotoma prima a e,
de potentia tantum
commensurabiles, & a e
posita rationali longi-
tudine commensura-
bilis. Secta de bi-
sariam inf; quadra-
to se ad a e applice-
tur aequale rectangu-
lum a g e. Et quia a e
plus potest quam d e

quadrato recte sibi longitudine commensurabilis,
erunt a g, g e recte longitudine commensurabi-
les, & sic utraq; toti a e longitudine commen-
surabilis. Sed a e rationali a b longitudine est
commensurabilis. Ergo & utraq; a g, g e, ratio-
nali commensurabilis est longitudine, & rationa-
lis. Quare ductis g h, e i ipsi a b parallelis, erunt
a h, g i rectangula rationalia. Rursus quia utraq;
d f, f e longitudine commensurabilis est ipsi d e;
d e vero longitudine incommensurabilis rationali
a b; erit utraq; ipsarum d f, f e ipsi a b longitu-
dine incommensurabilis. Itaq; rectangulum f c sive
f i sub Rationalib. potentia commensurabilibus con-
tentum erit Medium. Iam fiant ipsis a h, g i
quadrata s t, r p equalia ad communem angulum
n juncta, erunt quadrata s t, r p circa eandem
diametrum l n. Quoniam itaq; rectangulum
a g e.

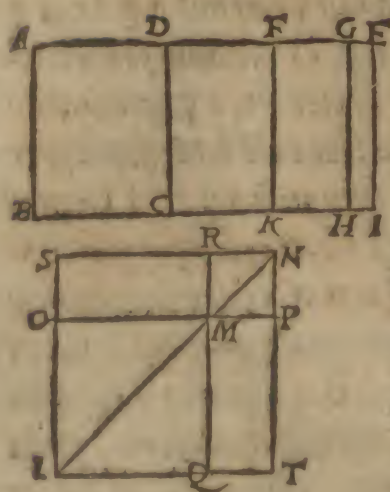
agc , quadrato c fect ae quale, $erunt ag, fc, ge$
 recte proportionales, adeoque fi medium proportio-
 nale inter ah, gi , id est, inter st, rp quadrata:
 Sed sp inter eadem quadrata est & Medium pro-
 portionale. Sunt itaque rectanguli sp & fi aqua-
 lia: Sed ipsi fi ae quale est fe , & ipsi sp ae quale rt :
 Itaque totum dignomoni onq cum quadratis rp
 est ae quale. Est a . totum ai ae quale quadratis st, rp . ex constr.
 Itaque reliquum ac quadratis oq ae quale est, & om
 potest spacium ac . Dico esse Apotomen. Quia
 enim ah, gi sunt spacia rationalia, ut patet;
 ipsis ae qualia quadrata st, rp rationalia, & re-
 ctæ op, mp , Rationales erunt. Cumque fi sit
 medium, & ei ae quale sp erit Medium; adeoque
 incommensurabilia sunt sp, rp ; & ejusdem cum
 ipsis rationis rectæ op, mp incommensurabiles;
 & reliqua om Apotome.

PROPOS: XCIII.

Theorema 69.

Si spacium ac contineatur sub
 Rationali ab & Apotoma secun-
 da ad ; Recta linea om spacium
 potens, Mediæ est apotome pri-
 ma.

Ips



Ipsi ad congruunt
 de , quibus conveni-
 unt, quæ habet defi-
 nitio apotomæ secun-
 da. Secta de bi-
 sariam in f reliqua
 omnia construuntur,
 ut in 92. a. Erunt rur-
 sus ag , ge longitu-
 dine sc commensurabiles,
 tum inter se, tum ipsi

18. X.
 16. X.

14. X.
 6. defin.

22. X.
 ex hypot.

10. X.

ac . Sed ac posita rationali ab longitudine est in-
 commensurabilis; ergo & ag , ge , quæ cum
 rationali ac commensurabiles sint; & ipsi ab po-
 tentia tantum commensurabiles sunt. Rectangula
 itaq; ah , gi sunt media. Rursus cum de , ab
 sint Rationales longitudine commensurabiles; sint
 & df , fe longitudine tum inter se, tum ipsi de
 commensurabiles; erunt fc , fi rectangula sub ra-
 tionalibus longitudine commensurabilibus conten-
 ta rationalia. Iam verò, ut in præcedenti, osten-
 deretur om posse spacium ac . Erit autem om Me-
 diæ Apotome prima. Quoniam ag , ge commen-
 surabiles sunt longitudine, erunt & ah , gi , sive
 st , rp commensurabilia. Ergo & op , mp erunt
 commensurabilia potentia tantum: & quidem
 Media, quod quadrata st , rp , aequalia Mediis
 ah , gi Media sint. Cumq; fi , & ipsi aequales p
 sit

sit rationale; & sic medio r p incommensurabile,
erunt o p, m p ejusdem cum ipsis rationis incommensurabiles longitudine. Cum verò etiam sint
Media, ut patet, & commensurabiles, erunt o p,
m p Media potentia tantum commensurabiles, &
quia continent rationale s p, erit o m Media A- 57. X.
potome prima.

PROPOS: XCIV.

Theorema 70.

Si spaciū a c contineatur sub Ra-
tionali a b, & Apotoma a d tertia Re-
cta linea o m spaciū potens, Media
est Apotome secunda.

Ipsi a d congruat d e, quibus conveniunt propri-
etates definitionis Apotoma tertiae. Secta d e bi- 18. X.
sariam in f, fiant omnia ut in 92; a erunt q, rursus 16. X.
a g, g e tum inter se. tum ipsi a e longitudine com-
mensurabiles. Quare cum a e sit ipsi a b longitu-
dine incommensurabilis, eidem & a g, g e longi-
tudine incommensurabiles erunt. Sed a e est ratio-
nalis: Ergo & ipsi potentia commensurabiles a g,
g e sunt rationales; d atq, ita rectangula a h, d 22. X.
g i sunt Media. Rursus cum d e ponatur longitu-
dine incommensurabilis rationali a b, utraq, d f, 14. X.
f e huic d e commensurabilis, erit ipsi a b longi-
tudine incommensurabilis; ipsaq, rectangula f c,
D d fime-

710. X.

fl media. Ostendetur autem, ut in 92, rectam om
posse spacium ac ; quam dicimus Media Apoto-
ma Secundam. Quoniam enim ah , ig sunt
Media, quadrata etiam st , rp ipsis equalia erunt
Media, & ipsa q_3 latera op , mp Media. Sed ag ,
 ge sunt ostensa commensurabiles: Ergo & ah ,
 gi , vel st , rp commensurabilia sunt, ipsa q_3 op ,
 mp potentia tantum commensurabiles. Et
quia ipsi a ostensa est ge commensurabilis longi-
tudine & fe ipsi de , erunt, ge , fe longitudine
incommensurabiles, & sic ejusdem rationis gi ,
 fi , id est, rp , sp incommensurabilia; ipsa q_3 op ,
 mp incommensurabiles longitudine. Cum q_3
etiam sint Media & commensurabiles, erunt
76. X. op , mp Media potentia tantum commensurabi-
les, & quia continet sp Medium; n erit om
Media Apotome Secunda.

PROPOS: XCV.

Theorema 71.

Si spacium ac contineatur sub Ra-
tionali ab , & Apotoma ad quarta, re-
cta linea om spacium potens, Minor
est.

Ipsi a d congruat de , quibus conveniunt pro-
prietates Apotome quartae. Secta d e bisariam,
fiant

fiant omnia ut in 92; eruntq; ag, ge longitudine
 incommensurabiles, cum ae plus possit quam de
 quadrato recte sibi longitudine incommensurabilis.
 Et quia ae est rationalis, rationalis ab longitudo-
 ne incommensurabilis, & erit ai rationale. Re-^{20. X.}
 ctangulum verò dip medium (quia de rationa-^{22. X.}
 lis ipsi ab longitudine incommensurabilis est) ipsiusq;
 dimidum fi Medium. Incommensurabilia au-
 tem erunt ah, gi , cum ag, ge ostensa sint in-
 incommensurabiles. Iam ostendetur ut in 92.
 rectam om posse spiciam ac , quam & Mino-
 rem dicemus. Quoniam enim ai rectangulum
 est rationale etiam compositum ex quadratis st ,
 & ipsi v æquale erit rationale. Et quia fi est
 Medium, ut patet; erit & sp , sub quadrato-^{ex conseq.}
 rum lateribus op, mp comprehensum Medium.
 Cumq; ah, gi sint incommensurabilia ostensa,
 ipsis etiam æqualia quadrata st, rp incommen-
 surabilia erunt & recte op, mp potentia incom-
 mensurabiles; Proinde quia op, mp sunt po-
 tentia incommensurabiles, & compositum ex qua-
 dratis Rationale, rectangulumq; sub ipsis Medi-^{77. X.}
 um, & erit reliqua om Minor.

PROPOS: XCVI.

Theorema 72.

Dd 2

Si

Si spacium ac contineatur sub Rationali ab & Apotome quinta ad , Recta linea om spacium potens est, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

Ipsi ad congruit de , quibus converſiant proprietates Apotome quintæ. Secta de bisariam, ſi-
ant omnia ut in 9^o; Eruntq; ut in 95. ag , ge
longitudine incommensurabiles, & ai ut in 92,
Medium; di verò Rationale ipsiusq; dimidium ſi
rationale. Erunt & ah , gi ut in 95 incommen-
surabilia, poteritq; om ; ut in 92, spacium ac , quæ
 om dicitur cum rationali Medium totum efficiens.
Quoniam enim ai est Medium, erit compositum ex
quadratis st , r^2 p Medium: Cumq; ſi ſit rationale,
etiam sp , ſub op , mp rationale erit. Sunt au-
tem op , mp potentia incommensurabiles, ut in
95 patet. Itaq; cum op , mp ſint potentia in-
commensurabiles, & compositum ex ipſarum qua-
dratis Medium, rectangulum verò ſub ipſis Ratio-
nale; reliqua om erit, quæ cum rationali Me-
dium totum efficit.

678. X.

PROPOS: XCVII.

Theorema 73.

Si spacium ac contineatur sub Ra-
tionali

rionali ab & Apotoma sexta ad , Recta linea om spacium potens est, quæ cum Medio Medium totum efficit.

Ipsi ad congruat de , quibus convenient proprietates Apotoma sexta. Secta de bisariam, fiant reliqua, ut in 92; eruntq; ut in 95, ag , ge longitudine incommensurabiles, & ai , di ut in 94, Media, hi usq; dimidium fi Medium. Erunt etiam ah , gi , ut in 95, incommensurabilia, poteritq; om , ut in 92, spacium ac . Quæ om dicetur cum Medio Medium totum efficiens. Quoniam enim ai est Medium, erit & compositum ex quadratis rectarum om , mp Medium. Et cum fi sit Medium, erit & sp sub op , mp contentum Medium. Cumq; fi ipsi ai sit incommensurabile, etiam sp incommensurabile erit compositum ex quadratis st , rp . Deniq; op , mp sunt incommensurabiles potentia, ut in 95. Quare cum op , mp sint potentia incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis Medium, rectangulumq; sub ipsis Medium, & composito ex ipsarum quadratis incommensurabile: reliqua om erit ea, quæ cum Medio, Medium totum efficit.

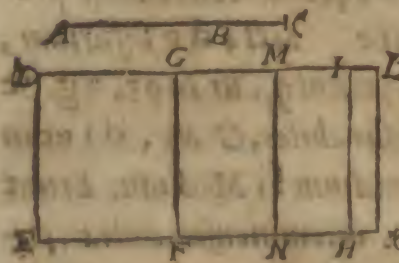
PROPOS: XCIIX.

Theorema, 74.

Dd 3

Qua-

Quadratum Apotomæ ab ad Rationalem de applicatum df ; latitudi-
 dg facit Apotomen primam.



Apotomæ ab con-
 gruat bc , ut ac , bc
 sint rationales poten-
 tia solum commensu-
 rabiles. & ad de ra-
 tionalem applicetur
 df æquale quadrato

ab , cujus latitudo d gerit Apotome primam. Ap-
 plicetur enim ad eandem de rectang. $d h$ æquale
 quadrato ac & ik ad ih æquale quadrato
 bc , ut totum dk æquale sit quadratis, ac , bc .

Quoniam ergo hoc quadratorum compositum
 β æquale est rectangulo $ac b$ bis sumto, cum
 quadrato ab ; ablato hoc quadrato df ; erit re-
 liquum gk æquale rectangulo $ac b$ bis sumto:
 ideoque, divisa gl bisariam per $m n$ erit mk rectan-
 gulo $ac b$ æquale. Cumque, ac , bc sint rationales,
 erunt & earum quadrata rationalia, & ex ipsis
 & compositum, id est, dh rationale, adeoque & in-
 ter se, & huic commensurabilia: d eritque, $d l$
 ipsi de longitudine commensurabilis. Rursus,
 quia ac , bc sunt rationales potentia solum
 commensurabiles, erunt, & earum rectangulam
 mk & huius duplum gk Media, & sic latitudo
 gl ra-

445. I.

47. II.

16. X.

21. X.

g irrationalis ipsi g t , id est, de longitudine in
 commensurabilis. Et cum d k sit rationale, g k ^{23. X.}
 Irrationale & Medium, erunt inter se incom- ^{10. X.}
 mensurabilia, & sic d l , g l & incommensurabiles
 vel Rationales potentia tantum commensurabi-
 les, adeoque d g Apotome, & quidem prima.
 Quoniam enim rectangulum a c b , id est, m k ^{47. X.}
 est & medium proportionale inter quadrata a c , & Lemma
 b c , id est, d h , i k , erunt d h , m k , i k , con- ^{54. X.}
 tinuè proportionalia, & d i , m l , il recte pro-
 portionales. Itaque d il rectangulum quadrato
 m l est æquale. Cumq; quadrata a c , b c , id est, d h , i k ^{17. VI.}
 sint commensurabilia & erunt d i , il
 longitudine commensurabiles. Cum ergo d l , g l
 sint inæquales & ad maiorem d l applicatum sit
 d il rectangulum æquale quadrato m l , id est,
 quartæ parti g l : Sint verò d i , il ostensa com-
 mensurabiles poterit d l plusquam g l quadrato ^{13. X.}
 rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare
 cum d g sit ostensa apotome, totaq; d l plus pos-
 sit quam g l congruens quadrato rectæ sibi lon-
 gitudine commensurabilis, eademq; tota ratio-
 nali d e longitudine commensurabilis sit. Erit ex
 defn. d g Apotome prima.

PROPOS: XCIX.

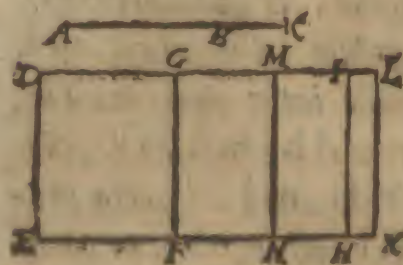
Theorema 75.

Dd

4

Qua-

Quadratum Mediæ Apotomæ primæ ab ad Rationalem de applicatum latitudinem dg facit Apotomen secundam.



Mediæ Apotomæ primæ ab congruat bc , ut ac , bc sint Mediæ potentia solum commensurabiles, continēq; Rationale; &

ad de rationalem applicetur df æquale quadrato ab ; Erit dg Apotome. Iisdem enim constructis, ut in præcedenti: Quoniam ac , bc sunt mediæ potentia commensurabiles, erunt earum quadrata, id est, dh , ik Mediæ & commensurabilia, totumq; dk utriq; ipsorum commensurabile & medium. Hoc ad de rationale applicatum r facit dl rationalem ipsi de longitudine incommensurabilem. Rursus, quia rectangulum acb ponitur rationale, erit ejus duplum gk rationale, ejusq; latitudo gl rationalis ipsi gf , id est, de longitudine d commensurabilis. Sed quia dk est Medium, gk verò rationale, dl & gl sunt incommensurabiles; & quia etiam rationales, sunt rationales potentia tantum commensurabiles; ac dg Apotome eaq; Secunda. Ostenditur enim, ut in 98, tota dl plus posse quàm gl congruens.

216. X.

β cor. 24. X

223. X.

221. X.

210. X.

274. X.

gruens quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; quæ gl cum sit longitudine commensurabilis rationali positæ de; ex definitione igitur dg est Apotome Secunda.

PROPOSITIO C.

Theorema 76.

Quadratum Mediæ Apotomæ secundæ, ab ad Rationalem de applicatum df, Latitudinem dg facit Apotomen Tertiam.

Mediæ Apotomæ secundæ ab, congruat bc, ut ac, bc sint Mediæ potentia solum commensurabiles, continentes Medium: Et ad de rationalem applicetur df æquale quadrato ab: Erit dg apotome. Iisdem enim; quæ prius, constructis, ut in 99, dk est Medium, & dl rationalis longitudine 23. X. incommensurabilis ipsi de. Et cum acb rectangulum sit Medium, etiam ipsius duplum gk, & latitudo gl longitudine incommensurabilis rationali de. Sed quia ac, cb sunt longitudine incommensurabiles; & est, ut ac ad bc, ita quadratum ac ad rectangulum acb; & erunt hæc 19. X. inter se incommensurabilia. Et quia quadrato 10. X. ex ac compositum ex quadratis ac, bc est d com. 16. X. mensurabile, rectangulo verò acb suum duplum; & erunt compositum ex quadratis, id est, dk & 14. X.

Dd s rectan-

§ 74. X.

rectangulum bis, id est, gk incommensurabilia; recta^q dl , gl longitudine incommensurabiles. Quae cum etiam sint rationales; Erunt rationales potentia tantum commensurabiles & dg Apotome, ea^q; Tertia Ostenditur enim; ut in 98, dl totam plus posse applicat^a gl quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis. Sed cum neutra illarum dl , gl sit longitudine commensurabilis positae rationali de , erit ex definit. Apotome Tertia.

PROPOSITIO CL

Theorema 77.

Quadratum Minoris ab ad Rationalem ae applicatum df , Latitudinem dg facit Apotomen Quartam

Minori ab congruat bc , ut ac , bc potentia incommensurabiles sint, facientes ex suis quadratis compositum rationale; sed rectangulum acb Medium, & ad de rationalem applicetur df , ut antea, erit^q dg apotome. Iisdem enim ut prius constructis in 100; Quoniam dk equale composito quadratorum ac , bc est rationale, erit dl rationalis rationali de longitudine commensurabilis: acb autem medium; erit & ejus duplum, id est, gk medium, & gl rationalis, ipsi de longitudine incommensurabilis. Rursus, quia dk rationale, gk medium, erunt incommensurabilia, ipsae^q dl , gl longitudine incommensurabiles; at^q ita Rationa-

tionales potentia tantum commensurabiles, & d g d 74. X.
 d Apotome, eaq; Quarta. Quoniam enim a c
 b c potentia sunt incommensurabiles, earum qua-
 drata d h, i k incommensurabilia r & d l, il lon-
 gitudine incommensurabiles sunt. Cum itaq; d l
 rectangulum, aequale sit quadrato m l, ut ex o s
 patet, poterit d l plus quam g l quadrato recte si- 19. X.
 bi longitudine incommensurabilis. It. q; cum tota
 d l posita rationali de longitudine commensurabi-
 lis, plus possit, quam congruens g l quadrato recte
 sibi longitudine incommensurabilis: erit d g ro-
 liqua ex definitione, Apotome Quarta.

PROPOS: CII.

Theorema 78.

Quadratum ejus a b, quæ cum
 Rationali Medium totum efficit,
 ad Rationalem de applicatum d f,
 Latitudinem d g, facit Apotomen
 Quintam.

Rectæ cum Rationali Medium totum efficienti
 a b congruat b c, ut a c, b c sint potentia incom-
 mensurabiles; facientes compositum ex ipsarum
 quadratis Medium, rectangulum vero rationale;
 & ad d e rationalem applicetur d f ut antea. Erit
 d g apotome. Quoniam enim ex quadratis re-
 ctarum a c, b c compositum, id est, d k est Medium, a a 23. X.
 erit d l rationalis posita longitudine incom-
 mensurabilis: Rectangulum autem a c b,

ejusq;

21. X. *eiusq; duplum g k rationale, & erit g l posita longi-*
tudine commensurabilis. Cum itaq; d k sit Medi-
 10. X. *um, & g k rationale, incommensurabilia sunt; &*
 74. X. *dl, g l longitudines, incommensurabiles, adeoq;*
Rationales potentia tantum commensurabiles, &
d g d Apotome eaq; quinta. Ostenditur e-
nim, ut in 101, dl plus posse quam g l congruens,
qua posita rationali longitudine commensurabilis
est, quadrato recta sibi longitudine incommensura-
bilis. Erit ergo ex definitione d g Apotome
quinta.

PROPOS: CIII.

Theorema 29.

Quadratum ejus ab , quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem de applicatum df , Latitudinem dg , facit Apotomen Sextam.

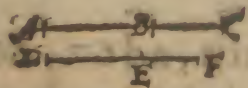
- Recta cum Medio medium totum facientia b*
congruat b c, ut a c, b c potentia sint incommensurabiles, facientes compositum ex suis qua-
dratis & rectangulum medium, & ad rationalem
d e applicentur ut antea. Erit dg apotome. Quoni-
am enim tam compositum ex quadratis ac, bc,
 22. X. *id est d k, quam rectangulum a c b ipsiusq; du-*
plum g k sunt Media; & erunt d l & g l rationa-
les

les longitudine incommensurabiles posita rationali
 de. Cumq; acb rectangulum composito qua-
 dratorum sit incommensurabile, erunt gk, dk
 incommensurabilia, & gl, dl longitudine in- p 10. X.
 commensurabiles, adeoq; rationales potentia so-
 lum commensurabiles, & dg Apotome caç; 74 X.
 Sexta. Ostenditur enim, ut in 101, dl plus posse
 quàm congruens gl quadrato recte sibi longitudi-
 ne incommensurabilis: & quia neutra illarum po-
 sita rationali de longitudine commensurabilis est,
 erit ex definitione dg Apotome Sexta.

PROPOS: CIV.

Theorema 80.

Recta linea de Apotomæ ab Lon-
 gitudine commensurabilis, & ipsa
 de Apotome est, atque ordine ea-
 dem.



Apotomæ ab congruens sit
 bc, ut ab, bc sint rationa-
 les potentia commensurabiles,
 sitq; de commensurabilis ipsi ab: Erit de apotome
 ordine eadem cum ab. = Fias, ut ab ad de, sic
 dc ad ef. Ergo etiam est ut ac ad df, ita bc. 11. II.
 ade f. Quoniam igitur ab, de sunt longitudi- p 12. V.
 ne commensurabiles, & erunt & bc, ef, & ac, 74 X.
 d flen-

- d & longitudine commensurabiles. Et cum a , c , b , e sint rationales, & etiam d , f , & ipsis commensurabiles rationales erunt. Rursus, quia est, ut a c ad d , f , ita b c ad e , f . & permutando, ut a c ad b , c , ita d , f ad e , f ; erunt b , e , ut illa potentia tantum commensurabiles. Et quia etiam sunt rationales; Erit reliqua de Apotome; & quidem ordine eadem cum ab . Si enim possit a , c plus quam b , c quadrato recta sibi longitudine commensurabilis: etiam d , f quam e , f . Si a , c tota fuerit rationali posita longitudine commensurabilis, & erit & d , f , & sic Apotome prima; Si verò congruens b , c , etiam e , f ; & sic Secunda: si neutra, etiam neutra, & sic Tertia. Sed si a , c plus possit, quam b , c quadrato recta sibi longitudine incommensurabilis; Ergo etiam d , f quam e , f ; siq; a , c tota fuerit rationali posita longitudine commensurabilis; erit & d , f ; & sic d , e eodem modo Apotome quarta: Si verò congruens b , c , etiam e , f ; & sic Apotome quinta, sexta & ostenditur prout a , b .

Scholium.

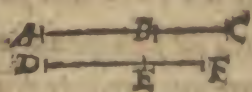
Eadem observationes, ad 67, de potentia commensurabilibus sunt additæ, possunt huc quoque transferri.

PROPOS: CV.

Theorema 81.

Recta

Recta linea *de* Mediæ Apotomæ
ab commensurabilis, & ipsa *de* Me-
 diæ Apotome est, atque ordine ea-
 dem.



Mediæ apotomæ *ab* con-
 gruat *bc*, ut *ac*, *bc*, sint

Mediæ potentia tantum com-

mensurabiles: & ipsi *ab* sit *de* commensurabilis
 vel longitudine vel potentia tantum: Factis ijs-
 dem quæ in precedenti, ærunt *bc*, *ef*: & *ac*, 10. X.
df eodem modo vel longitudine vel potentia com-
 mensurabiles prout *ab*, *de* fuerint. Cumq; *ac*,
bc sint Mediæ, etiam *df*, *ef* ipsis commensurabi- 24. X.
 les & Mediæ erunt. Rursus cum sit, ut *ac* ad *df*,
 ita *bc* ad *ef*: & permutando; ut *ac* ad *bc* ita
df ad *ef*; erunt hæc, ut illæ, potentia tantum com-
 mensurabiles: & quia etiam Mediæ, & erit *de* re- 75 vel
 liqua Mediæ apotome, & quidem ordine eadem 76. X.
 cum *ab*. Quoniam est, ut *ac* ad *cb*; ita *df* ad
ef: & ut *ac* ad *cb*, ita quadratum *ac* ad re- 3. Lemma
 ctang. *ac* *cb*: ita ergo etiam erit quadratum 19. X.
df ad rectang. *df* *ef*; & permutando, ut quadra-
 tum *ac* ad quadratum *df*, ita rectangulum *ac* *cb*
 ad rectang. *df* *ef*; & hæc, ut illæ, commensurabi-
 lis. Si itaq; rectangulum *ac* *cb* fuerit rationale,
 ærit & *df* *ef*; & *de* Mediæ i Apotome pri- 75. X.
 ma: Sed si Medium, Medium g & *de* Mediæ 76. X.
 apotome secunda.

PRO-

EVCLIDIS ELEM:
PROPOS: CVI.

Theorema 82.

Recta linea *de* Minori *ab* com-
mensurabilis, & ipsa *de* Minor est.

Minori *ab* congruat *bc*, ut *ac*, *bc* sint po-
tētia incommensurabiles facientes ex suis quadra-
tis compositum rationale, rectangulum verò Mediū;
sed ipsi *ab* sit *de* cōmensurabilis sive longitudine,
sive potentia tantum. Factis iisdem, quæ in priori-
bus, erunt *df*, *ef* ipsi *ac*, *bc* eodem modo ut in
105. commensurabiles. Cumq; sit, ut *ac* ad *df*;
ita *bc* ad *ef*; & permutando, ut *ac* ad *bc*; ita
22. VI. *df* ad *ef*; Ergo, ut quadratum *ac*, ad quadra-
tum *bc*; ita quadratum *df* ad quadratum *ef*;
& componendo; ut compositum ex quadratis *ac*,
bc, ad quadratum *bc*, ita compositum quadra-
torum *df*, *ef* ad quadratum *ef*; & permutan-
do, ut compositum ex quadratis *ac*, *bc*, ad com-
positum ex quadratis *df*, *ef*; ita quadratum
10. X. *bc* ad quadratum *ef*; β Ergo ut hæc sibi, ita illa
sibi commensurabilia erunt. Sed compositum ex
quadratis *ac*, *cb* est rationale: Ergo & ex *df*,
fe compositum. Rursus, quia, ut in 105. *ac* &
24. X. *df* sunt commensurabilia, hoc, ut illud, γ erit
Medium. Deniq; cum sit, ut *ac* ad *bc*, ita *df*
ad *ef*; Sed *ac*, *bc* sint potentia incommensura-
biles; erunt & *df*, *ef*: Quæcum faciant ex suis
quadratis

quadratis compositum rationale; rectangulum vero sub iisdem $d f$, $e f$ Medium, d erit $d e$ Minor. 77. X.

PROPOS. CVII.

Theorema 85.

Recta linea $d e$ commensurabilis ei $a b$, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipsa $d e$ cum Rationali Medium totum efficiens est.

Recta $a b$ cum rationali Medium totum efficienti; congruat $b c$; ut $a c$, $b c$ potentia sint incommensurabiles, facientes compositum quadratorum Medium, rectangulum vero rationale; sitq; $d e$ ipsi $a b$ quocunq; modo commensurabilis. Factis iisdem, quæ in prioribus, ostenditur, ut in 106, compositum ex quadratis $a c$, $b c$, composito quadratorum $d f$, $e f$ commensurabile esse. Cumque illud ponatur Medium, erit $\&$ hoc Medium. Rursus ostendetur etiam rectangulum $a c b$ commensurabile esse rectangulo $d f e$, $\&$ hoc, ut illud Rationale, ex 105. Sunt deniq; $d f$, $e f$ eodem modo, ut in 106, potentia incommensurabiles; quæ cum ex suis quadratis compositum efficiant Medium, rectangulum vero sub ipsis rationale; erit $d e$. 78. X. quæ cum Medio rationale efficit.

PROPOSITIO CVIII.

Theorema 86.

Ec

Recta

Recta linea de comensurabilis ei ab , quæ cum Medio Medium totum efficit; & ipsa de cum Medio Medium totum efficiens est.

Recta ab cum Medio Medium totum efficienti congruat bc , ut ac , bc potentia sint commensurabiles, facientes compositum quadratorum Medium & rectangulum Medium incommensurabile composito quadratorum. Factis hysdem, ut antea, ostenditur ut in 106, compositum ex quadratis ac , bc composito quadratorum df , ef commensurabile esse; quorum illud, cum sit Medium, etiam hoc est Medium. Rursus, ut in 105, rectangulum acb rectangulo dfe commensurabile, & hoc, ut illud, Medium ostenditur: Sunt etiam df , ef , ut in 106. potentia incommensurabiles. Denique, etiam ut compositum ex quadratis ac , bc incommensurabile est rectangulo acb , ex hypotensi; ita compositum ex quadratis df , ef rectangulo dfe . Ergo est de , quæ cum Medio Medium totum efficit.

α 14. X.

β 79. X.

PROPOSITIO CIX.

Theorema 85.

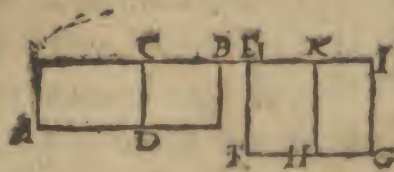
Medio db à Rationali ab detracto; Recta linea, quæ reliquum spaciū a c potest, una ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome vel Minor.

Ad

LIBER X.

435

Ad Rationalem e f



apparetur rectangula
h, kg equali recta-
ulis ac, db ut totum
i sit equal tota

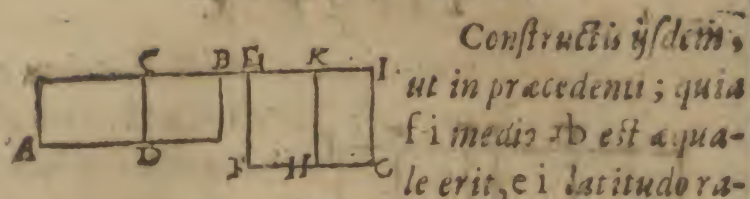
rationali a b; a erit q, e i rationalis rationali e f non
gitu ine commensurabilis; & quia kg Medio d b
est aequale, erit k i rationalis longitudine e com
mensurabilis rationali e f. Itaq, e i, k i sunt
longitudine incommensurabiles, & sic rationales
potentia tantum commensurabiles; ipsaq, e k a-
potome & congruens k i. Si jam e i plus potest
quam k i quadrato recte a sibi longitudine commen-
surabilis, erit e k Apotome prima, atq, sic recta po-
tens spaciū f k contentum sub rationali e f & a-
potome prima, id est, a c est, Apotome. Si verò
plus potest quadrato recte incommensurabilis, cum
tot a e i posita e f longitudine sit incommensurabilis,
erit e k Apotome quarta, & recta potens spa-
cium e k sub rationali e f & apotoma quarta e k
erit q Minor.

PROPOSITIO CX.

Theorema 86.

Rationali db à Medio a b detra-
cto; alie duæ Irrationales fiunt, vel
Mediæ Apotome prima, vel cum ra-
tionali Medium totum efficiens.

Ec a Con.



23. X.

21. X.

74. X.

93. X.

96. X.

rationalis rationali ef longitudine incommensurabilis; ki vero β commensurabilis, quia hi rationali db est aequalis. Itaque ei, ki rationales potentia tantum commensurabiles & reliqua $e k y$ apotome, ei q congruens ki . Si $e i$ plus possit quam ki quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis; & congruens ki commensurabilis-longitudine rationali ef , erit $e k$ apotome secunda; quare recta potens spatium $e k$ contentum sub rationali ef , & apotome secunda; d erit Media Apotome prima. Si vero plus quadrato rectae longitudine incommensurabilis, erit $e k$ apotome quinta; & recta potens hoc spatium $f k$ contentum sub rationali & apotome quinta, erit cum rationali Medium totum efficiens.

PROPOSITIO CXI.

Theorema 87.

Medio ab à Medio ab detracto, quod db sit cōmensurabile ab toti; ab reliqua duæ Irrationales fiunt, vel Media Apotome secunda; vel cum Medio Medium totum efficiens.

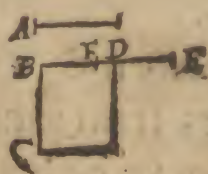
Constru.

Constructis iisdem, ut antea; & erunt $e l$, $k i$ rationales rationali $e f$ longitudine incommensurabiles. Sed cum $f i$, $h i$ ipsis $a b$, $d b$ aequalia ponantur incommensurabilia, erunt $e i$, $k i$ longitudine incommensurabiles, & sic rationales potentia tantum commensurabiles; & reliqua $e k$ β apotome. Si ergo $e i$, plus possit quam $k i$ quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis, & β 74. X. utraq; $e i$, $k i$ rationali $e f$ sit incommensurabilis, ut patet, erit $e k$ apotome tertia & recta potens spacium $f k$ contentum sub rationali $e f$ & apotoma quarta $e k$, & erit Media Apotome Secunda: Si vero plus potest quadrato rectae longitudine incommensurabilis, erit $e k$ apotome Sexta; & recta potens spacium $f k$ contentum sub rationali & apotoma Sexta, & erit ea quae cum δ 97. X. Medio Medium totum efficit.

PROPOSITIO CXII.

Theorema 33.

Apotome a non est eadem, quae ex binis nominibus.



Rationali $b c$ posita applicetur rectangulum $c d$ aequale quadrato a . Quoniam ergo a est apotome, & erit $b d$ apotome prima; cui congruat $d e$. Erunt $E e$ & $b e, d o$.

- be, de ex definitione apotome primæ rationalis
 potentia tantum commensurabilis; quarum prior
 posita commensurabilis longitudine, plus poterit
 quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis.
 Rursus, quia & aponitur esse ex binis nominibus,
 eadem latitudo bd erit ex binis nominibus
 prima. Sit autem majus nomen $b\epsilon$. Ergo ex de-
 finitione binomij primi $b\epsilon, fd$ sunt rationales po-
 tentia solum commensurabiles, quarum prior po-
 sita existens longitudine commensurabilis, plus po-
 test quam fd quadrato rectæ sibi longitudine com-
 mensurabilis. Itaq; cum tam be , quam $b\epsilon$ lon-
 gitudine sint commensurabiles eidem bc , & erunt
 quoq; $be, b\epsilon$ inter se commensurabiles longitudi-
 ne: Ergo & eadem be , reliquæ parti fe longi-
 tudine d commensurabilis est, & fe ut be rationa-
 lis erit. Sed quia duarum commensurabili-
 um longitudine be, fe , una be ipsi de est
 incommensurabilis, & erit & altera fe eidem de
 incommensurabilis longitudine; & sic fe, de sunt
 rationales potentia solum commensurabiles. Itaq;
 fd reliqua est Apotome & sic irrationalis, quæ
 antea erat rationalis. Non ergo a existens Apo-
 tome, est eadem quæ ex binis nominibus.

Corollarium.

Ex his colligitur Apotomen & cæ-
 teras ipsam consequentes Irrationa-
 les lineas neq; Media neq; inter se ef-
 se easdem.

Nam

Nam quadratum Medie ad rationalem lineam applicatum, latitudinem α efficit rationalem, posita $\alpha.23. X.$ et longitudine incommensurabilem. Quadratum $\beta.28. VI.$ autem apotome ad rationalem applicatum, latitudinem $\gamma.99. X.$ facit apotomen primam; quadratum $\delta.100. X.$ Medie apotome primae. $\epsilon.101. X.$ apotomen secundam; $\zeta.102. X.$ Medie apotome secundae δ Apotomen tertiam: Minorem, $\eta.103. X.$ apotomen quartam: Ejus, quae cum rationali Medium totum efficit, θ apotomen quintam: Ejus, quae cum Medio Medium totum efficit, ι apotomen sextam. Cum itaque haec latitudines differant à Media latitudine, quia haec rationalis, illae irrationales sunt; & inter se, quia ordine non sunt eadem apotomae, patet Apotomen & reliquas illam consequentes, & à Media & inter se differre.

Cum verò, ut in hoc Theoremate ostensum est, Apotome non sit eadem, quae ex binis nominibus: quadrata autem apotomae & reliquarum ipsum consequentium faciant latitudines; Apotomen primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, sextam: Sed quadrata Binomialis & reliquarum consequentium faciant latitudines ex binis nominibus primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, sextam; constat, latitudines Apotomae & aliarum Irrationalium, quae post ipsam, easdem non esse, latitudinibus ejus, quae ex binis nominibus & reliquarum post ipsam Irrationalium; adeoque, inter se differre. Quare, cum & haec & illae à Media differant, patet, rationali posita Medium Irrationales esse lineas inter se differentes, de quibus hactenus.

Ee 4

I. Media

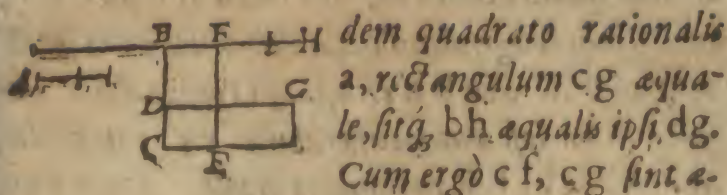
1. est Media. 2. Ex binis nominibus cum 6. speciebus. 3. ex binis Medijs prima. 4. ex binis Medijs secunda. 5. Major. 6. Rationale ac Medium potens. 7. Bina Media potens. 8. Apotome cum sex speciebus. 9. Mediæ apotome prima, 10. Mediæ apotome secunda. 11. Minor. 12. Cum rationali Medium totum efficiens. 13. Cum Medio Medium totum efficiens. *Pergit jam Euclides exposui Irrationalium proprietatibus, inter se conferre Apotomas & binomiales propos. 113. 114. 115.*

PROPOSITIO CXIII.

Theorema 89.

Quadratum Rationalis a ad eam bc , quæ ex binis nominibus bd , cd , applicatum be , latitudinem bf facit apotomen, cujus nomina tota fk & congruens bk commensurabilia sunt nominibus bd , dc , ejus, quæ ex binis nominibus & in eadem proportionem, & adhuc Apotome bf , quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea bc , quæ ex binis nominibus.

Ad nomen minus dc recta bc , applicetur eidem.



dem quadrato rationalis
 a , rectangulum cg equa-
 le, sitq; bh equalis ipsi dg .
 Cum ergo cf , cg sint a-
 gualia, erit, ut bca ad dc , ita dg , id est bh ad
 bf ; & dividendo: ut bda ad dc , ita fh ad bf ;
 eritq; fh major quam bf , sicut bd major est quam
 dc . Summa fi ipsi fb equalis, β fiat, ut hi ad if ;
 ita fb ad bk . & componendo, ut hf ad fi , id est,
 fb ; ita fk ad bk . Ostensum verò est, esse, ut
 hf ad bf , ita bd ad dc . Sed hæc sunt no-
 mina binomialis, rationales potentia tantum,
 commensurabiles. Ergo & hf , bf sunt po-
 tentia commensurabiles. Rursus, quia est, ut
 hf ad bf ; ita fk ad bk : δ erunt hf , fk antece-
 dentes simul, id est, hk tota; ad consequentes fb ,
 bk simul, id est, bk , ut hf ad bf . Quare ut hk
 prima ad bk secundam, ita quadratum primæ
 ad quadratum secundæ. Sed cum cg sit ratio-
 nale, utpote quadrato rationalis a equale, ratio-
 nali dc applicatum & faciens dg rationale ipsi cd
 longitudine commensurabile; erunt hb , id est,
 dg & dc rationales longitudine commensurabi-
 les. Cumq; sit, ostensum, esse, ut bd ad dc , ita fk
 ad bk , & ut fk ad bk , ita hk ad fk . Ergo
 ut quadratum bd ad quadratum dc , ita quadra-
 tum hk ad quadratum fk . Et sic commensura-
 bilis sunt hæc atq; illa. Sed fuit, ut quadratum

E e s,

hk, ad

EVCLIDIS ELEM:

448

1 cor. 16. X

74. X.

16. X.

12. X.

15. X.

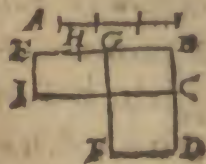
h k, ad quadratum f k; ita recta h k ad b k: ideoq; sunt longitudine cōmensurabiles inter se & reliquæ b h. Sed b h est ostensa rationalis: Ergo & h k ipsi cōmensurabilis est rationalis, quare & h b, h k rationales erunt. Cum itaq; f k ipsi b k potentia tantum cōmensurabilis sit, erit & f k rationalis. Quare cum f k, b k sint rationales potentia tantum cōmensurabiles, erit reliqua b f apotomæ congruens, b k. Quod primū. Cumq; h b, b k ostense sint longitudine inter se cōmensurabiles; ergo & ipsi h k: ipsaq; h b sit longitudine cōmensurabilis d c, erit eidem d c longitudine cōmensurabilis b k. Rursus, quia est, ut b d ad d c, ita f k ad b k, & permittendo, ut b d ad f k; ita d c ad b k; igitur itaq; ut h a, ita & illæ sunt longitudine cōmensurabiles; eruntq; ipsius b f Apotomæ nomina f k, b k, nominibus b d, d c binomialis longitudine cōmensurabilia Quod secundū. Rursus, quia est, ut b d ad d c ita f k ad b k; erūt apotomæ b f nomina f k, b k in eadem ratione cū b d, d c nominib. ipsius b c Binomialis. Quod est tertium. Deniq; vel b d plus potest quàm d c quadrato rectæ sibi longitudine cōmensurabilis vel incommensurabilis. Si cōmensurabilis, cum sit, ut b d ad d c, ita f k ad b k, poterit etiam f k plus quàm b k quadrato rectæ sibi longitudine cōmensurabilis. Si incommensurabilis, poterit plus quadrato rectæ longitudine incommensurabilis. Quare, si rationali posita longitudine com-

incommensurabilis fuerit bd , erit & fk , quare vel prima vel quarta apotome erit, cum illa prima vel quarta sit: Si d c , etiam b k , quare secunda vel quinta: Si neutra b d , d c , etiam neutra f k , b k , quare tertia vel sexta. Ergo apotome eadem ordine cum Binomiali.

PROPOSITIO CXIV.

Theorema 90.

Quadratum Rationalis a ad Apotomen bc applicatum bi , latitudinem be facit eam, quae ex binis nominibus bg , ge cujus nomina bg , ge commensurabilia sunt nominibus bd , cd , Apotome bc , & in eadem proportionem ut bd ad cd , ita b h , ad he , & adhuc, quae b e ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipsa Apotome bc .

Applicetur ad bd , b fre-et angulum a quale ipsi bi facienslatitudinem bg . Erit ut be ad a 14. vel bg , ita bd ad bc ; & conver- 16. VItendo, ut be ad ge , ita bd ad cd .

Setetur etiam ge ad h juxta proportionem bc ad ge . Quia est, ut be tota ad ge totam, ita eh ex be ablata, ad hg ex ge ablatam. Erit ergo etiam reliqua bh ipsius bc , ad reliquam he ipsius ge , ut tota be , ad totam ge . Sed ut be ad ge , ita erat eh ad hg . Ergo ut bh ad he , ita eh ad hg , ipsaq; eh est media proportionalis inter bh , gh :
 & Quare

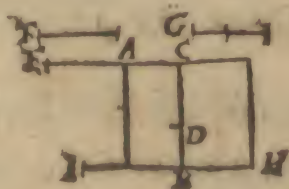
- y cor. 20. VI. Quare ut $b h$ prima ad $g h$ tertiam, ita quadratum primæ, ad quadratum tertiæ. Quia autem fuit, ut $b d$ ad $c d$; ita $b e$ ad $g c$, id est, $b h$ ad $h e$; Sunt autem $b d$, $c d$ nomina apotomæ $b c$ rationales potentia solum commensurabiles; & erunt etiā $b h$, $h e$ & ex his quadrata cōmensurabilia; adeoq; $b h$, $h e$ propter quadrata cōmensurabilia lōgitudine, cōmensurabiles; & tota $b h$ longitudine cōmensurabilis parti $g h$, etiā ipsi $b g$ longitudine commensurabilis erit. Sed cum quadrato rationali a æquale rationale $b f$ sit applicatū ad rationale $b d$, & erit $b g$ latitudo rationalis lōgitudine ipsi $b d$ cōmensurabilis. Eidem ergo & $b h$ longitudine commensurabilis n erit & rationalis. Quare cum $b h$, $h e$ sint ostensa potentia solum commensurabiles, & $b h$ rationalis; erit & $h e$ rationalis; & sic $b h$, $h e$, sunt rationales potentia solum commensurabiles, & ipsaq; $b e$ ex binis nominibus. Quod primum est. Quia verò & patet esse $b h$ ad $h e$, ut $b d$ ad $c d$; & permutando, $b h$ ad $b d$, ut $h e$ ad $c d$, Suntq; $b h$, $b d$ longitudine commensurabiles; & Ergo & $h e$, $c d$. Itaq; nomina $b h$, $h e$ binomialis $b e$, nominibus $b b$, $c d$ Apotomæ $b c$ longitudine sint cōmensurabilia. Quod secundū. Imò & in eadem ratione, cum sit ut $b h$ ad $h e$, ita $b d$ ad $c d$. Quod est tertium. Deniq; $b d$ plus potest, quā $c d$ quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si commensurabilis, etiā $b h$ plus potest quā $h e$ quadrato.

Quadrato recte sibi longitudine commensurabilis,
Si incommensurabilis, incommensurabilis unde
ordine sex binomia singula ejusdem ordinis cum
apotomis inveniuntur. Quod est quartum.

PROPOSITIO CXV.

Theorema 9'.

Si spacium ab contineatur sub A-
potoma ac & ea cb quæ ex binis no-
minibus, cujus nomina cd, db , com-
mensurabilia sunt nominibus ce, ae ,
Apotomæ ac , & in eadem propor-
tione, ut cd ad bd , ita ce ad ae , recta
linea f spacium ab potens est Ratio-
nalis.



Quadrato rationalis g æquale rectangulum
ch applicetur ad cb, ærit bh apotome, cujus a. 13. X.
nomina hi, bi sint longitudine commensurabilia
nominibus cd, db, & in eadem ratione, nempe
hi ad bi, ut cd ad db, adeoq, ut ce ad a c:

19. V. & permutando, ut tota hi ad totam ce , ita ab
 12. X. lata bi ad ablata ae . Ergo & reliqua bh ad re-
 10. X. liqua ac , ut hi ad ce . Quæ cum sint commen-
 11. VI. surabiles longitudine, quia utr^q ipsi cd longi-
 tudine commensurabilis est, erunt & hb , ac &
 hc ipsi ab cum sint in eadem ratione. Sed hc æ-
 quale quadrato rationalis g est rationale. Ergo &
 ab ipsi commensurabile est rationale, & ipsum
 potens recta f rationale.

Corollarium.

Constat hinc, rationale spacium
 includi posse duabus Irrationalibus
 ut hic binomiali & apotomæ inclu-
 sum est rationale $a b$.

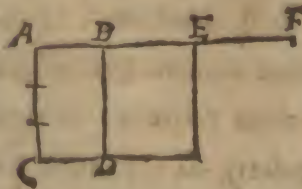
PROPOS: CXVI.

Theorema 92.

A Media ab infinitæ Irrationales
 fiunt, & nulla alicui antecedentium
 est eadem.

38. X.
 Lemma.

11. def.



Sub rationali ac & Me-
 dia, ab comprehensum spa-
 cium ad , Irrationale pos-
 sit be Irrationalis quæ nul-
 li 13 Irrationalium eadē erit.

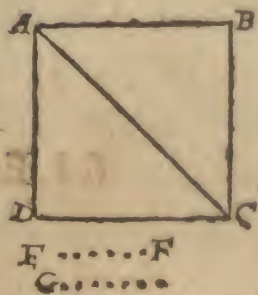
Medium

Medium enim ad rationalem applicatum, faceret latitudinem rationalem; reliquarum 12, Irrationalium γ 23. X. quadrata applicata ad rationalem facerent latitudines vel binomiales vel apotomas. Sed Quadratum δ a 61. ad ϵ applicatum ad a ϵ facit latitudinem a b 66. X. & a 97. ad 103. X.

Media differentem a reliquis omnibus Irrationalium quadratorum latitudinibus. Ergo b ϵ Irrationalis differt ab illis 13 Irrationalibus. Si autem compleatur rectangulum d ϵ , erit illud sub rationali, & irrationali comprehensum Irrationale, quod cum possit ϵ f , & erit & haec irrationalis, & differt a reliquis omnibus Irrationalibus. Cum enim huius quadratum applicatum ad rationalem b d , faciant latitudinem b ϵ distinctam a reliquarum Irrationalium quadratorum applicatorum latitudinibus, ut patet ex precedentibus, ipsam quoque ϵ b Irrationalem peculiarem a reliquis esse oportet.

PROPOS: CXVII.

Theorema 93.

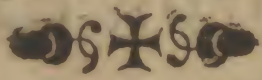


Propositum sit nobis ostendere, in quadratis figuris d b diametrum a c lateri a b incommensurabilem esse longitudine.

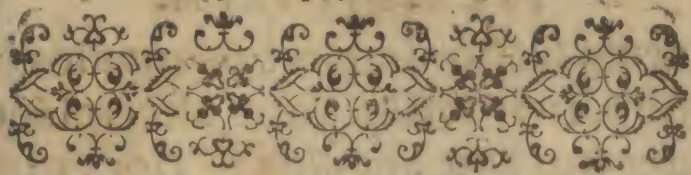
Si non

47. I.

Si non, esto commensurabilis habeantq; a c
a b proportionem quam e f & g numeri sue ratio-
nis minimi & primi: quarum g unitas non erit
(Cum enim ex a c quadratum a sit duplum qua-
drati a b, sitq; ut quadratum a c ad quadratum
a b, ita numerus quadratus ex e f, ad quadratum
numerum ex a g, erit etiam ille hujus duplus; ideoq;
si g esset unitas, esset ipsius quadratum uni-
tis, numerusq; quadratus ex e f binarius, quod ab-
surdū;) Sed numerus. Et quia, ut jam ostensum est,
14. IIX. ex e f est duplus quadrati ex g; & metietur quadra-
tus ex g quadratum ex e f & latus g metietur la-
tus e f. Cum verò g etiam metiatur seipsum, e-
runt e f & g numeri inter se compositi, habentes
communem mensuram g: qui tamen inter se e-
rant primi. Quod absurdum. Non ergò a c &
a b inter se commensurabiles sunt.



ELE.



ELEMENTO- RUM EUCLIDIS.

LIBER XI.

Definitiones.

i.

Solidum est, quod longitudi-
dinem & latitudinē & cras-
situdinem habet.

2. Solidi autem extremum est su-
perficie.

3. Linea recta est ad planum recta;
cum ad rectas omnes lineas à quibus
illa tangitur, quæque in proposito
sunt plano, rectos angulos efficit.

4. Planum ad planum rectum est
cum rectæ lineæ quæ communi pla-

Ff

norum

norum sectioni ad rectos angulos in uno planorum ducuntur alteri plano ad rectos sunt angulos. Hoc enim modo non magis inclinabit in unam partem quam in alteram, sed æqualiter illi insisteret.

5. Rectæ lineæ ad planum inclinatio est, cum à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis, atque à puncto, quod perpendicularis in ipso plano fecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodē est plano, altera recta linea fuerit adjuncta; est, inquā angulus acutus insistente linea, & adjuncta comprehensus.

6. Plani ad planum inclinatio, est angulus acutus rectis Lineis contentus, quæ in utroq; planorum ad idem sectionis cōmunis punctū ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

7. Planum ad planum similiter inclinatum esse dicitur atque alterum ad alterum, cum dicti intersectionū anguli inter se fuerint æquales.

8. Paral-

8. Parallela plana sunt, quæ inter se non conveniunt.
9. Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur, multitudine æqualibus.
10. Æquales & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis multitudine & magnitudine æqualibus continentur.
11. Solidus angulus est plurium quãduarũ linearum, quæ se mutuo contingant, nec in eadẽ sint superficie, ad omnes lineas inclinatio. vel: solidus angulus est, qui plurib. quã duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad unum punctum constitutis, continetur.
12. Pyramis est figura solida, quæ planis cõtinetur ab uno plano ad unum punctũ constituta. Potest autẽ illud unũ planũ, à quo omnia tendunt, esse vel triangulum vel quadrangulũ, vel pentag. Unde Pyramis vel triangula, vel quadrãgula solet dici. Reliqua omniã ad unum punctum constituta sunt triangula numero respondentia lateribus plani. E f 2 13. Prif.

13. Prisma est figura solida, quæ planis continetur, quorum adversa duo sunt & æqualia & similia & parallela; alia verò parallelogramma. Est nimirum columna quædam laterata æqualis crassitudinis, cujus bases opposita sunt æquales, similes & parallela, sive hæ sint triangula, sive quadrata, sive pentagona. Itaque tot continebit parallelogramma quodlibet Prisma, quot latera sive anguli in uno quoque oppositorum planorum reperiuntur.

14. Sphæra est, quando semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus, in seipsum rursus revolvitur, unde moveri cæperat, circumassumpta figura: vel, Sphæra est figura solida, una superficie comprehensa, ad quam, ab uno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

15. Axis autem sphærae est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus convertitur.

16. Cen-

16. Centrum Sphæræ est idem, quod est semicirculi.

17. Diameter autem sphæræ est recta quædam linea per centrum ducta, & utrinq; à sphæræ superficie terminata.

18. Conus est, quando rectanguli manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in seipsum rursus revolvitur. Unde moveri experat circumassumptâ figurâ. Atque si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum convertitur, orthogonius erit conus. Si verò minor, amblygonius: Si verò major, Oxygonius: tum enim angulus adverticem vel rectus fit, vel obtusus, vel acutus.

19. Axis autem coni, est quiescens illa linea, circa quâ triangulum vertitur.

20. Basis verò coni, est circulus, qui à circumducta recta describitur.

21. Cylindrus est, quando rectangu-

Ff 3

lipa

li parallelogrammi manente uno latere, eorum, quæ circa rectū angulum, circumductum parallelogrammum in seipsum rursus revolvitur, unde caperat moveri, circumassumptâ figura.

22. Axis autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

23. Bases verò cylindri, sunt circuli à duobus adversis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

24. Similes conī & cylindri, sunt, quorum & axes & basium diametri proportionales sunt.

25. Cubus est figura solida, sub sex quadratis æqualibus contenta.

26. Tetraedrum, est figura solida, sub quatuor triangulis æqualibus & æqui lateris contenta.

27. Octaedrum, est figura solida sub octo triangulis æqualibus & æqui lateris contenta.

28. Dodecaedrum, est figura solida, sub

da, sub 12. pentagonis æquilateris & æquiangulis contenta.

29. Icosædrum, est figura solida, sub 20. triangulis æqualibus & æquilateris contenta. *Hæc s. corpora sola appellant regularia. Quia omnia plana quibus continentur, sunt æqualia æquilatera & æquiangula quorum constructiones in decimo tertio libro docebuntur.*

30. Parallelepipedum est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum quæ ex aduerso, parallelæ sunt, contenta. *Horum tot sunt genera, quot sunt parallelogrammorum, ut cubus, altera parte longius, Rhombus, Rhomboides.*

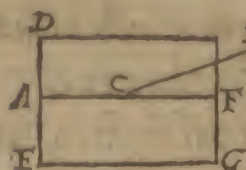
31. Solida figura in solida figura dicitur inscribi, quando omnes anguli figuræ inscriptæ constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel deniq; in planis figuræ, cui inscribitur.

32. Solida figura, solidæ figuræ vicissim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel deniq; plana figuræ circumscriptæ, tangunt omnes angulos figuræ, circum quam describitur.

EVCLIDIS ELEM:
PROPOSITIO I.

Theorema 1.

Rectæ lineæ pars quædam non est in subjecto plano, quædam verò in sublimi.



Sit, si potest, a c pars in plano d g, pars c b extra planum. Si ergò continuetur ac in illo plano d g usq; in f, erunt eidem a c lineæ duæ di-

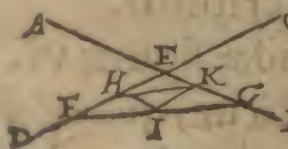
14. I.

versa c b, c f ad eandem partem adjectæ, quod absurdum.

PROPOSITIO II.

Theorema 2.

Si duæ rectæ lineæ *a b, c d*, se mutuo secent *in e* uno sunt plano. Atque triangulum omne *e f g* in uno est plano.



In lineis a b, c d connectantur puncta f, g, ut fiat triangulum f e g, cujus si pars quædam, ut h i f, dicatur es-

se extra illud planum, erunt linearum e f, f b partes, supra partes in plano, quod absurdum. Quod si jam totum triangulum e f g, est in eodem plano, oportet

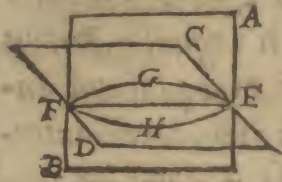
1. XI.

oportet & ipsius terminos, lineas ef , eg , & adeoq;
quarum sunt partes, ab , cd , totas, in eodem pla-
no esse.

PROPOSITIO III.

Theorema 3.

Si duo plana ab , cd , se mutuo se-
cent; communis eorum sectio ef est
linea recta.



Si quis ef lineam neget in u-
troq; plano existere, erit vel in
neutro, & intra terminos e
& f ducta in alterutro plano-

rum recta egf : includent $\alpha 14$. ax. I.
rectæ ef & egf figuram, quod α absurdum; vel
in alterutro, intraq; eodem terminos ducta in
altero recta egf , idem sequetur absurdum.

PROPOSITIO IIH.

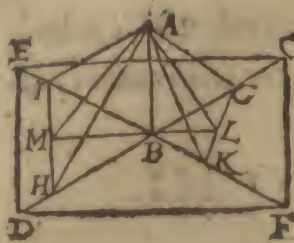
Theorema 4.

Si recta linea ab , rectis duabus cd ,
& f lineis semutuo secantibus, in cō-
muni sectione b ad angulos rectos
insistat: illa ab ducto etiam per ipsas
plano cd , & f ad angulos rectos erit.

Ff s

Quis

2. XI.



Quia enim se mutuo secant
ed, ef lineæ, æ erunt in eo-
dem plano. Sumptis bg &
bh, itemq; bi & bk equa-
libus, ductisq; gk, ih & lm,
quæ in punctis l & m illas

duas gk, ih secet; demittantur ex a puncto sub-
limi ag, al, ak, ah, am, ai. Cum ergo latera
bg, bk, trianguli bgk æqualia sint lateribus
bh, bi, trianguli bhi, cum angulo compre-
hensæ ad b æquali. Erunt & gk, & ih bases
& æquales. Anguliq; bkg, & bhi æquales. Rursus
cum in triangulis bkl, & bim, æqualium an-
gulorum ad b, & lk bipsi bim, latera inter-
jacentia bk, bi, sint æ equalia; æ erunt & reli-
qua latera kl, lb, reliquis im, mb æqualia. Eo-
demq; modo in triangulis d rectangulis abg, abh,

d ex const.

æqualium laterum bg & bh, & ab communis;
etiam ag, ah bases fiunt & æquales. Sicut & ai

26. I.

& ak. Amplius in triangulis akh & aih æqua-
lium laterum gk & ih, ak & ai, & basium ag

28. I.

& ah; æ erunt anguli comprehensæ aih, ahg æqua-
les. Itaq; cum in triangulis akl, & aim, æquales
angulos i & k comprehenduntia latera sint æqua-
lia; æ erunt & bases al, am æquales. Deniq; cum
in triangulis abl & abm, æqualia sint latera
bl & bm; & ab commune; & bases al, am æ
erunt; & anguli ad b æquales; & quia deinceps

10. def.

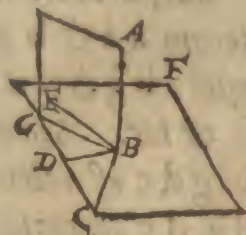
etiam æ recti. Erit ergo recta ab perpendicularis
ipsi

psil m; adeoq; omnibus ipsam tangentibus in plano c e, d f, ipsi etiā plano c e d f \perp perpendicularis.

PROPOSITIO V.

Theorema 5.

Si recta linea ab, rectis tribus lineis ac, bd, be, se mutuo tangentibus in cōmuni sectione ad rectos angulos insistat; illæ tres rectæ in uno sūt plano.



Cum qualibet duarū illarū per sectionē mutuam, α sint in eodē plano, ut bc, bd, in plano ut bc, bd in plano fc; ponatur, si potest tertiā be extra planum illud in sublimi α 2. XI.

Quoniam a b, b e sunt α in eodē plano, sint in plano ac. Quoniā ergo plana fc, α a e, sibi mutuo occurrūt in b necessariō productæ se mutuo secabunt, & β 3. XI. β quidem sectione cōmuni bg. Sed quia a b ponitur ad angulos rectos ipsis b c, b d; verit etiam plano γ 4. XI. fc, per ipsas ducto, ad angulos rectos; δ Et sic et. δ 3. def. XI. iam rectæ b g, quæ ipsam in b tangit. Itaq; duo recti anguli ab g, abe in eodem plano a g constituti, pars & totum erunt æqualia.

PROPOSITIO VI.

Theorema 6.

Si duæ rectæ lineæ ab, cd, eidem plano e f ad rectos sint angulos, parallelæ erunt rectæ illæ lineæ.

Ducta

3. def. XI

ex constr.

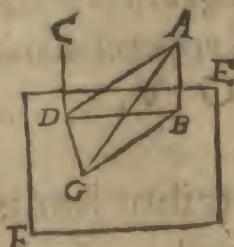
74. I.

8. I.

5. XI.

2. XI.

28. I.



Ducta abd in plano ef ; erunt anguli d & b recti in eodem plano ef . Ducatur dg perpendicularis ad bd , equalis ipsi ab ; connectanturque rectæ bg , ag , da . Iam in triangulis abd ,

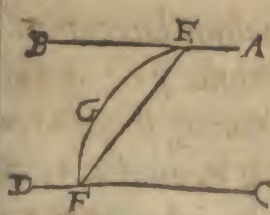
bdg equalium laterum ab & dg ; & bd communis cum angulo comprehenso recto; erunt etiam bases bg , ad , æquales. Rursus in triangulis abg , adg equalium laterum ad & bg , & basis communis ag ; erunt anguli abg & gda æquales. Sed ille rectus. Ergo & hic. Sed ex eadem definitione etiam angulus gdc est rectus. Erit ergo gd tribus rectis db , da , dc ad angulos rectos. Quare rectæ db , da , dc in uno sunt plano. Est & autem ab in eodem plano, in quo, db , da . Itaque recta cd in eodem erit plano cum ab . Sed cum interni anguli b & d sint recti; Erunt ab , cd parallela. Quod erat propositum.

PROPOS: VII.

Theorema 7.

Si duæ sint parallelæ rectæ lineæ ab , cd , in quarum utraque sint quælibet puncta e , f ; illa linea ef quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano.

Sin



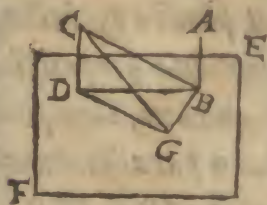
Si minus, recta ef , est in eodem plano, sed extra, ut quidem aliud secet planum, cuius cum plano harum parallelarum communis sectio sit egf

recta. Itaque duae rectae ef & egf intra eosdem terminos e & f includunt superficiem. Quod absurdum. Vera etiam est propositio de non parallelis in eodem plano. $\alpha 3$. XI. $\beta 14$. ax. I.

PROPOS: VIII.

Theorema 8.

Si duae sint parallelae rectae lineae ab, cd , quarum altera cd ad rectos cuidam plano ef sit angulos, & reliqua ab eidem plano ef ad rectos angulos erit.



Ducta bd , angulus cdb fit α ; def. XI.

α rectus. Sed cdb , & abd $\beta 29$. I.

sunt β duobus rectis aequales.

Ergo & abd est rectus. Ducatur in plano ef perpendi-

cularis bg ad bd , aequalis ipsi cd ; junganturque gd, gc, bc . Iam in triangulis cdb, gbd , rectangulis, aequalium laterum gb, cd , & communis bd , γ Erunt & bases gd, bc aequales. Sic $\gamma 4$. I.

in

§ 8. I.

• 4. XI.

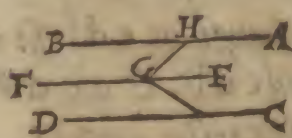
§ 6. XI.

in triangulis cdg & cbg aequalium laterum cd ,
 bg & bc , gd & bases communis gc : anguli
 $d cg$ & $c dg$ sunt aequales. Cumq; hic sit α re-
 ctus. Ergo & ille. Quare recta gb , duabus rectis
 bd , bc se mutuo secantibus in b , ad angulos re-
 ctos insistit, & sic plano per bd , bc ducto: erit ad
 angulos rectos. In quo plano cum sit & $a b$, quia &
 bd , bc , in eodem sunt plano, in quo parallelae $a b$,
 cd . Itaq; & gb recta ba ad angulos rectos α in-
 sistit. Quare cum $a b$ sit recta ad rectas bg , bd :
 erit recta ad planum per bg , bd , id est, ad pla-
 num ef .

PROPOS: IX.

Theorema 9.

Quæ eidem ef rectæ lineæ ab , cd sunt
 parallelae, sed non in eodem cum il-
 la plano hæ ab , cd quoque inter se
 sunt parallelae.



• 4. XI.

§ 8. XI.

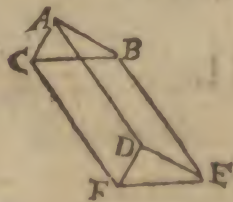
A quolibet puncto g , rectæ
 ef , ducantur duæ perpendi-
 culares gh , quod in plano pa-
 rallelarum ab , ef ; ac gi in plano parallelarum
 ef , cd . Quoniam ergo eg est recta ad gh & gi
 tangentes se in puncto g : α erit etiam recta
 plano per illas gh , gi ducto: cumq; fe una pa-
 rallelarum sit illi plano per gh , gi , perpendicularis:
 β Erit & altera ab ; & per eandem causam etiam
 cd , quia eidem ef est parallela. Cum itaq; ab ,
 cd ei-

$c d$ eidem plano sint ad angulos rectos, & erunt etiam parallela. Debit autem propositio hac sumere duas parallelas extra planum, quia alias cum non coincidisset quæ de parallelis in eodem plano loquitur. 7 6. XI.

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Si duæ rectæ lineæ $a b, a c$ se mutuò tangentes in a , ad duas rectas $d e, d f$ se mutuò tangentes in d , sint parellela; non in eodem plano; illæ angulos $b a c, e d f$, æquales comprehendent.



Ponantur $a b, d e$; & $a c, d f$ æquales: Ducanturq; $b c, e f$; $b c, a d, c f$. Erunt ergo $b e, a d$ æquales parallelas $b a, e d$

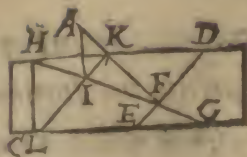
connectentes æquales, ut & 3. I.

$a d, c f$: β adeoq; & $b c, e f$, quia eidem $a d$ parallela. At a deniq; $b c, e f$. Atq; ita in Tri. β 9. XI. angulis $b a c, e d f$, æqualium laterum, $a b, d e$ & $a c, d f$; æqualiumq; basium $b c, e f$; anguli $b a c$; & $e d f$ fiunt æquales. 7 8. I.

PROPOSITIO XI.

Problema 11.

A dato puncto a in sublimi; ad subiectum planum $b c$; perpendicularem rectam ducere.



α 12. I.

β 1. I.

γ 31. I.

δ ex const.

ε 4. XI.

ζ 8. XI.

η 2. XI.

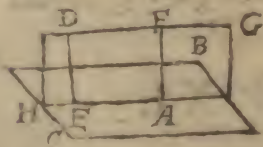
θ 3. def. XI.

ad d e ducatur perpendicularis g h, ad quam ex a demittatur perpendicularis a i, quæ ad planum subjectum perpendicularis est. γ Ducta enim in plano b c, per i, ipsi d e parallela k l; cum d f sit δ ad angulos rectos duabus f a, f h: & sic ad planum per illas f a, f h: erit etiam k i ad idem planum recta. Sed quia a i cum f a, f h, in eodem est plano, tangunt rectam k i in i: erit θ angulus k i a rectus; adeoque α i ad angulos rectos ipsis k i, i f. Igitur & ad planum b c erit recta.

PROPOS: XII.

Problema 21.

Dato plano b c à puncto a, quod in illo datum est, ad rectos angulos rectam lineam excitare.



α 11. XI.

β 31. I.

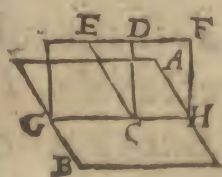
Ex quovis puncto sublimi d demittatur α ad planum b c perpendicularis d e, quæ, si ceciderit in a factum est quod queritur: sed si ceciderit in punctum aliud e, extensa recta per e & a, ducatur per a ipsi d e β parallela

recta af , in plano gh per d , e , a , ducto erit: af recta ad planum datum erecta. Cum enim de , af sint parallelae, & de ad planum bc recta; de erit etiam af recta ad idem planum bc . ex const. d. 8. XI.

PROPOSITIO XIII.

Theorema II.

Dato plano ab à puncto c , quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabantur ad eandem partes.



Ducantur, si potest fieri, cd & ce ad planum ab perpendiculares. Erunt ergo ambæ parallele, quæ tamen in puncto c concurrunt, quod absurdum.

Eodem modo ex uno puncto sublimi impossibile est, ad idem planum, duas perpendiculares demittere.

PROPOSITIO XIV.

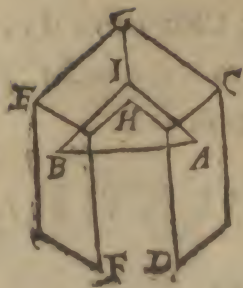
Theorema 12.

Ad quæ plana cd , ef eadem ab erecta linea, recta est illa sunt parallela:

Gg

M

α 3. XI.



β 17. I.

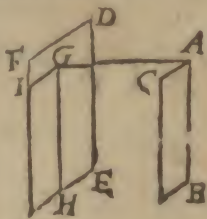
Si non sunt, concurrant tandem producta illa plana ad partes c, c. & faciantq; sectionem gh lineam recta, in qua sumto puncto ut q , i, ducatur ia , ib , in planis gcd & gef . Itaq; cum ab , ponatur recta, ad utrumq; planum erunt trianguli aib , anguli iab , & iba recti, qui tamen sunt duobus rectis & minores.

PROPOSITIO XV.

Theorema 13.

Si duæ rectæ lineæ ab , ac se mutuò tangentes in a , ad duas rectas de , df se mutuò tangentes in d , sint parallelæ; non in eodem consistentes plano: parallelæ sunt, quæ per illa ducuntur plana bc , ef .

α 11. XI.
 β 31. I.



γ 9. XI.

δ 29. I.

ϵ 3. def. XI.

ζ 4. XI.

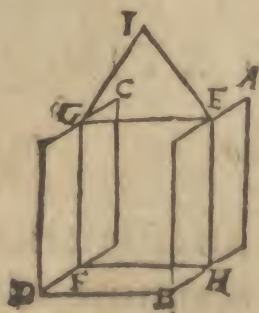
α Ducatur ex a in planum cd perpendicularis ag , & per punctum g ducantur gh , gi parallelæ ipsis de , df . Cum itaq; gh , ab , sint parallelæ ipsis dc ; & etiam inter se sunt parallelæ, anguliq; bag , agh , duobus rectis & æquales: ac propter hunc, rectum, etiam ille rectus. Eodemq; modo ca & ag angulus est rectus. Itaq; cum ga ad ab , & ac sint recta,

recta, recta etiam erit ga , ad planum bc , per il-
 lus ductum. Eadem autem ga , etiam, est recta ad
 planum ef . Itaque bc & ef sunt plana pa-
 rallela. ex constr.
14. XL

PROPOSITIO XVI.

Theorema 14.

Si duo plana parallela ab , cd , pla-
 no quopiam ef secantur: communes
 illorum sectiones eb , ef , sunt paral-
 lelae.



Si non sunt parallelae, con-
 venient tandem productae, ut
 in puncto I . Quoniam linea
 he tota est in plano uno ab ;
 linea vero fg tota in plano
 cd producto: Producta itaque
 illa plana concurrent quae ta-
 men ponuntur parallela.

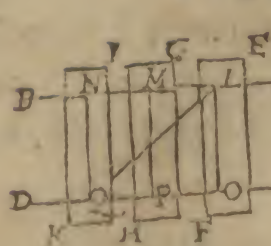
PROPOSITIO XVII.

Theorema 15.

Si duae rectae lineae ab , cd parallelis
 planis ef , gh , ik , secantur, in eadem
 rationes secabuntur, videlicet, ut
 segmenta inter plana dicta sint pro-
 portionalia, ut lm , ad mn , ita op , ad pq .

Gg

Ducan-



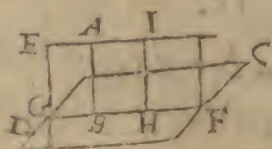
α 1. XI,
β 16. XI.

Ducantur enim rectæ lo, nq
in planis ef, i k; & conjungā-
rūt recta lq, quæ occurrit pla-
no gh in r puncto, à quo ad
pūcta mp ducantur ineodem
gh planor m, rp: α eritq, triangulum l n q, in
uno plano. Cumq, parallela plana gh, i k secentur
plano trianguli l n q β erūt cōmunes sectiones mr,
nq parallelo; ut & rp & lo. quāobrem erit,
ut l r ad r q; ita l m, ad m n. Item, ut l r ad r q;
ita o p ad p q: ac proinde, ut l m ad m n; ita
o p, ad p q.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema 16.

Si recta linea ab plano cuiusdam cd
ad rectos sit angulos, & omnia, quæ
per ipsam ab plana, eidem cd ad an-
gulos rectos erunt.



α per 31, I.
β 8. XI.

Sit enim per ab ductum pla-
num ef, secans planum cd
per rectam lineam fg: atq,
ex puncto h utcunq, sumto
in linea fg ipsi ab, parallela hi α erigatur. Quo-
niam itaq, ab, i h sunt parallela, illa ad planū cd
recta existente, β erit & hac recta. Et ad cōmu-

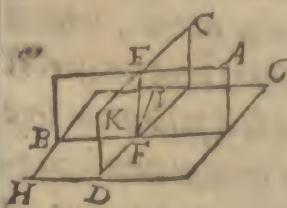
nem

rem sectionem fg , perpendicularis: eodemq; modo rectae omnes in plano g ipsi ab parallelae erunt ad communem sectionem fg perpendicularares, possumq; planum gf ad planum cd rectum. Nec 3. defi. XI. aliter habet cum omnibus alijs planis per ab g ductis 4. defi. XI. tis; scilicet & illa omnia ad planum c d recta sunt.

PROPOS: IX.

Theorema 17.

Si duo plana ab, cd se mutuo secantia, plano cuidam gh ad rectos sunt angulos; communis etiam illor sectione ef ad rectos eidem plano angulos erit.



Aut enim ef ad b f , d f , communes sectiones planorum ab, cd cum plano gh est recta, aut non. Si est ad illas recta, & etiam ad planum gh , per ipsas ductum: si ad alteram tantum

b f , recta dicatur ef ; quoniam ef in plano ab , 4. XI. ad planum gh recto perpendicularis est communi eorum sectioni b f ; & erit & ad ipsum planum gh recta: Et ita, si ad alteram d f tantum poneretur recta, idem inferretur. si autem ef ad neutram b f , d f credatur esse recta, & ducatur ex f in plano ab , ad b f sectionem communem cum plano gh perpendicularis fi : & in plano cd & 11. I. perpendicularis fk . Quoniam ergo planum ab cg 3 est

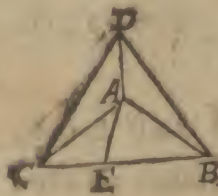
est rectum ad planum gh ; erit & i f ad b f sectio-
nem communem perpendicularis, ut & kf , ad idem
planum gh : adeoque ex puncto f ad planum gh
duæ erectæ sunt perpendiculares, & Quod absurdum.

13. XI.

PROPOS: XX.

Theorema 18.

Si solidus angulus a tribus angulis
planis bac , cad , dab contineatur: ex
his duo quilibet, ut ut assumi, tertio
sunt maiores.



Si enim omnes tres sint inæqua-
les inter se, patet duos esse tertio
maiores. Si autem duo tantum
æquales & tertius minor, itidem
duo quilibet tertio sunt maiores.

23. I.

Si unus, ut bac , sit maximus; reliqui autem sive
æquales sive inæquales, quilibet horum cum illo re-
liquo est major. Quo maximo bac , majores etiam
sunt duo reliqui bda & dac . In plano enim per
 ab , ac , ducto, & fiat angulus bac , æqualis an-
gulo bda , & recta ad æqualis ae , & per c ex-
tendatur recta bc secans ipsas ab , ac , in b & c ;
& connectantur rectæ bd , cd . Quoniam in tri-
angulis bda , & bae , latera ad & ae sunt æ-
qualia & ab commune, illisq; comprehensi angu-
li æquales, & Ergo & bases be , bd erunt æquales.
sed quia latera db , dc sunt majora latere bc ;
& demtis æqualibus bd , be ; erit dc , major quæ ec .

4. I.

3. I.

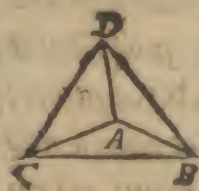
Itaq;

Itaq; cum in triangulis dac & eac , latera da , ea sint equalia & a commune; basis autem dc maior basi ec ; d erit & angulus dac major quam eac , & equalibus additis, erunt duo bad & dac simul maiora angulis bae , eac simul, id est, angulo, bac maximo.

PROPOSITIO XXI.

Theorema 19.

Omnis solidus angulus a sub minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.



Ductis rectis bc , cd , db , erunt tres anguli b, c, d solidi, quorum quilibet sub tribus angulis planis continetur, ut b sub cba , abd & dbc ; c sub bca , acd , dc ;

d sub cda , adb , bdc . Quoniam duo anguli cba , abd , majores sunt angulo dbc ; similiterq; duo adb , adc majores angulo bdc ; & duo acd , acb majores angulo dc . Sed tres hi cbd , bdc , & dc , sunt duobus rectis equalibus; β erunt illi sex duobus rectis majores. Sed cum iidem sex una cum tribus ad a angulis sint sex rectis & aequales; ablatis illis sex, qui majores sunt duobus rectis: erunt tres reliqui ad a , constituentes angulum solidum, minores quatuor rectis. Nec diversa est demonstratio si angulus solidus constet ex pluribus, quam tribus planis angulis.

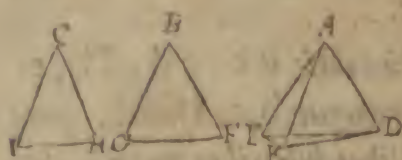
Gg 4

PRO

EUCLIDIS ELEM:
PROPOS: XXII.

Theorema 20.

Si fuerint tres anguli plani a, b, c quorum duo, ut libet, assumti reliquo sint maiores: comprehendant autem ipsos rectæ lineæ ad, ae, bf, bg, ca, ci , fieri potest, ut ex lineis de, fg, hi , æquales illas rectas connectentibus triangulum continuatur.



Si tres anguli dati, a, b, c , sunt æquales erunt quoque bases de, fg, hi , æquales;

¶ 4. I.

¶ 24. I.

¶ 23. I.

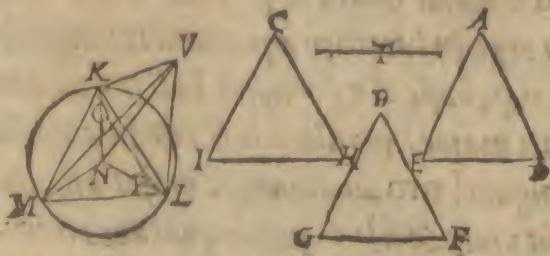
Et illarum qualibet duæ tertia maiores si vero duo anguli sint æquales Et tertius minor, erunt etiam duæ bases æquales. Et basis tertij utraq; minor; Et sic rursus qualibet duæ tertia sunt maiores. Si autem unus a sit maximus; reliquis b, c vel æqualibus vel inæqualibus; erit & de basis omnium maxima & sic de, fg , maiores tertia hi , de item & hi maiores quam fg . Erunt etiam fg, hi maiores quam de . Fiat enim dak angulus æqualis angulo b & ak sit æqualis ipsi ad , quia ex a per puncta d, k transit peripheria circuli ob trium illarum rectarum ad, ak, ae æqualitatem, connectanturq; dk, ke . Quoniã ergo duo anguli b, c ponuntur maiores angulo dac & b æqualis est

est angulo dak ; erit angulus c major reliquo
 kac , basis $q_3 dk$ equalis basi fg : basis verò ke
 minor quam hi . Cum ergò dk , ke sint d mayo- 20. I.
 res quam de , eadem d maiores etiam erunt fg ,
 & hi . tribus ergò hisce ita comparatis, ut duæ
 qualibet tertia sint maiores, facile erit inde tri- 22. I.
 angulum efformare.

PROPOS: XXIII.

Problema. 3.

Ex tribus angulis planis abc , quo-
 rum duo quomodocunq; assumpti,
 reliquo sunt maiores, solidum angu-
 lum constituere.

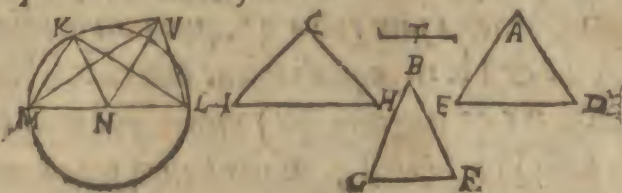


Tres illos angulos abc comprehendentes lineæ
 omnes ponantur æquales; & subtendantur bases
 de, fg, hi , ex quibus potest triangulum con- 22. XI.
 stitui, quoa sit klm , ut latus kl , basi de , lm
 basi fg , & km , basi hi sit æquale; ac circa il-
 lud

5. IV. *lud β describatur circulus, ex cuius centro n, ducantur nk, nc, nm, quibus majores sunt qualibet rectarum, ut ad, ae, angulos planos includentium. Primò cadat centrum n intra illud tri-*
 7 cor. 5. IV. *angulum klm, quia Oxygonium Si ergò ad, ae,*
 8. I. *non sunt majores, quam nk, nl: sint vel æqua-*
les: deruntq, propter bases etiam æquales de &
lk anguli knl & a; ut & lnm & b; & mn
k & c æquales. Cumq, tres illi circa centrum n
 corol. 15. I *sint quatuor rectis: æquales: erunt & abc qua-*
tuor rectis æquales, contra hypothesin: vel mino-
res ad & ac, quam nk & nl, & cum no, np,
 2. VI. *equalibus abscissis; ducta op parallela erit ipsi kl,*
propter & proportionalem sectionem trianguli lnk
& triangula lnk, pno, equiangulara. Cumq,
 14. V. *sit, ut nk, ad kl: ita no ad op: erit lk; id*
 4. VI. *est, de major quàm op: sicut nk, quàm no.*
 25. I. *Cum ergò in laterum equalium triangulis, dae*
& onp, basis de sic major basi op; erit & an-
gulus a major, angulo onp; & sic angulus b ma-
ior angulo lnm, angulusq, c major angulo mnk.
Erunt proinde abc anguli quatuor rectis, quibus
illi tres circa n sunt æquales, majores, contra hy-
pothesin; Itaq, ad, ae nec æquales, nec minores,
sunt ipsis nl, nk.

Deinde cadat centrum n in latus lm, quod fit,
 si angulus k sit rectus, sintq, ad, ae, id est, bf, bg;
 vel æquales ipsis nl, nk, id est, lineæ lm, quæ æ-
 qualis

qualis est ipsi fg . Erunt ergo bf , bg aequales ipsi fg , quod λ absurdum; vel sint minores, eruntq; bf , bg minores ipsis nl , nk , id est, ipsa lm , vel fg , quod iterum absurdum.



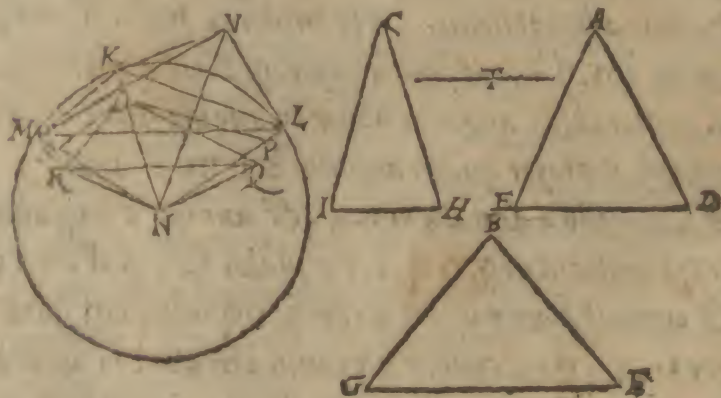
Postremo cadat centrum n extra triangulum klm , quod fit, si angulus k sit obtusus: sintq; ad , ae , vel aequales ipsis nl , nk ; erunt propter bases de , kl , aequales, etiam anguli a & knl aequales, & angulus c angulo knm ; totusq; lnm , angulis a & c , qui duo simul ex hypothesis, tertio sunt majores. Rursus, idem angulus lnm propter bases lm & fg aequales, aequalis est angulo b , contra hypothesis. Vel minores sint ad , ae , quam ln , nk ; abscessis aequalibus no , np , erit ut in primo casu, angulus a major angulo onp , angulusq; c major quam angulus knm . Itaq; siat μ angulo a aequalis onq , & angulo c angulus onr , ponanturq; nq , nr aequales ipsis ad , ae ; & connectantur oq , or ; cadetq; oq infra op , quia per o , p , q ex centro n transit circulus, & quare, cum angulus, pon , aequalis sit angulo nkl , externus interno, erit angulus qon , minor angulo nkl . Eodemq; modo nor minor, quam $nk m$. Si ducatur os parallela ipsi km , Totus ergo lkm , toto, qor major, erit.

Sunt

I.

24. I.

Sunt autem in triangulis onq & dac æqualium laterum, & anguli æquales a & onq etiā bases de & oq & æquales, idest, oq & lk , & sic or & km . Connexa jam recta qr , quoniam in triangulis qor & lkm , æqualia sunt latera kl , km ; ipsis oq , or & angulus qor minor quàm lkm : Erit basis lm , idest, fg , major basi qr . Sed quia bf , bg , sunt æqualia ipsis nq , nr ; basis autem fg , major basi qr : Erit angulus b major angulo qnr . Rursus, quia anguli onq & a ; item onr & c facti sunt æquales: erit totus qnr æqualis duobus, a & c . Sed a & c ponuntur majores angulo b : Igitur & qnr eodem b , major est, qui tamen modo ipso qnr major est demonstratus. Itaq; majores esse oportet ad , ac ipsis nk , nl .



Iam cum recta ad , ac majores sint rectis nk & nl ubicunq; centrum trianguli existat, possit recta ad plus quam recta nk , quadrato lineæ c per lemma.

Lemma: propositionis 15. X. ita ut quadratum recte a d æquale sit quadratis rectarum n k. Et ex centro n exciteretur n u, ad planum circuli k l m æqualis ipsi t, connectanturq; u k, u l, u m. Quoniam ergo n u est recta ad planum k l m, recta etiam erit ad rectas n k, n l, n m; ac proinde quadratum recte u k æquale quadratis rectarum k n, u n. Cumq; & quadratum a d æquale sit, ex constructione, iisdem quadratis k n, n u, erunt ergo u k & a d quadrata æqualia. ipsæq; recte u k, a d æquales. Rursus, quia latera u n, n k, trianguli u n k æqualia sunt lateribus u n, l n, trianguli u n l, & anguli ipsius contenti u n k, u n l recti: Erunt bases u k, u l æquales ut & u m. Sunt ergo tres, u k, u l, u m æquales a d; ipsis etiam a c, b f, b g, c h, c i, æquales: adeoq; in triangulis u k l, l u m, k u m, æqualium laterum & basium, cum triangulis d a c, f b g, h c i: erunt & angulis, a, b, c anguli ad u d æquales; ipseq; angulus solidus u, tribus illis angulis continetur, quod erat propositum.

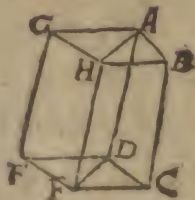
PROPOS: XXIV.

Theorema 21.

Si solidum a b, e f, parallelis planis a c, c f, f b, b a, a f, b e contineatur; adversa illius plana parallelogramma, sunt

sunt similia & aequalia.

36. XI.



Cum enim parallela plana af, be secantur plano ac : erunt communes sectiones $abcd$ parallelae similiter cum plana af, be secantur plano ac : erunt communes ipsorum sectiones ad, bc parallelae; & sic figura quadrilatera $abcd$ est parallelogramma, adeoque & reliquae omnes. Sed & opposita parallelogramma sunt similia & aequalia.

37. XI.

Cum enim rectae ab, bh parallelae sint rectis dc, ce in opposito plano; erunt abh, bce anguli aequales, & sic etiam reliqui anguli parallelogrammi bg reliquis parallelogrammi cf . Cumque ab ipsi dc in parallelogrammo ac : & bh ipsi ce in parallelogrammo bc aequalis sit: erit, ut ab ad bh ; ita dc ad ce : ac propterea, ut bh ad hg , ita ce ad ef . Ob eandem causam erunt latera parallelogrammorum bg, cf circa aequales angulos proportionalia & parallelogramma ipsa similia.

34. I.

34. I.

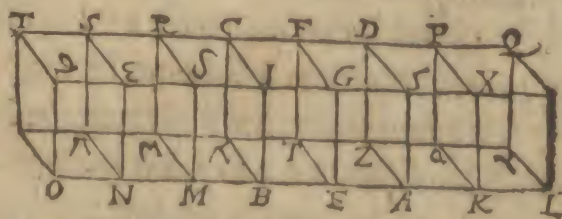
Ductis jam diametris ah, de ; cum in triangulis abh , & dce aequalia sint latera ab bh lateribus dc, ce , & angulus abh angulo dce : erunt tota trianguula d aequalia, ipsorumque dupla parallelogramma bg, cf aequalia. Idem de

de oppositis reliquis parallelogrammis demonstrabitur, quod & similia & equalia inter se sint.

PROPOSITIO XXV.

Theorema 22.

Si solidum parallelepipedum $abcd$, plano ef secetur adversis $a d$ $b c$ planis parallelo; erit, quemadmodum basis ag ad basin bg , ita solidum $æfd$, ad solidum $b c f e$.



Intelligatur parallelepipedum $abcd$ utrinque productum, sumanturque in ab , utrinque protracta, quocunque rectæ ak , kl ipsi ac : & quocunque rectæ bm , mn , no ipsi cb æquales; ducanturque per puncta k, l, m, n, o plana $k p, l q, m r, n s, o t$, parallela planis ad, ef, bc . Quoniam igitur solidum $acfd$ continetur planis parallelis, ex hypothesis; ipsum erit parallelepipedum, ex definitione; a habebitque plana opposita parallelogramma similia, ut & reliqua omnia $akp d, klq p, ebc f, bmr c, mnr s, not s, elq f, eot f$.

Sed

p 36. I.

y 29. I.

d r o. defin.
I X.

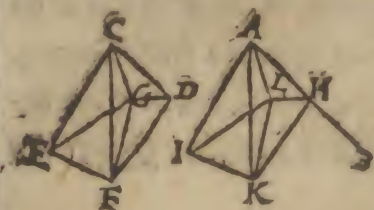
Sed cum parallelogramma ag , ku , lx super æqualibus basibus ac , ak , kl sint p æqualia similiaq; propter angulos γ æquales, & latera circum illos æqualia & proportionalia erunt. Sic æqualia & similia sunt parallelogramma ay , kz , la . Itaq; cum & æqualia & similia sint parallelogramma ad , kp , lq ; erunt tria plana ag , ay , ad solida $acfd$, æqualia & similia tribus planis ku , kz , kp , solida $akpd$: hisce vel tribus in unoquoque solido planis opposita sunt æqualia & similia, nēpe ag ipsi zf , ay , ipsi uf ; & ad ipsi ef . Itaq; d æqualia sunt solida $acfd$, $akpd$, $klqp$. Eadēq; ratione & $ebcf$, $bmr c$, $mnsr$, $nots$. Quare quam multiplex est basis lg , basis $a g$, tam multiplex erit solidum $lefq$, solidi $acfd$, & quam multiplex basis og , basis bg . tam multiplex solidum oef solidi $befc$. Quoniam verò si basis lg , æqualis est basi og ; æquale etiam est solidum $lefq$ solido oef ; quia basibus lg , og existentibus æqualibus, æqualia quoq; sunt & similia sex parallelogramma solida $oefc$: Si autem basis est major base, solidum quoq; solido majus est; & si minor, minus; in quacunq; hoc fiat multiplicatione. Erit ergò, ut basis $a g$ prima magnitudo, ad basim bg , secundam magnitudinem; Ita solidum $a o f d$, tertia magnitudo; ad solidum $b e f e$, quartam. Eadem ratione demonstratur esse solidum ad solidum, ut basis dy ab basim cy ; &

cy; & ut basis ay, ad basin by; & ut basis bg ad basin cg.

PROPOSITIO XXVI.

Problema 4.

Ad datam rectam ab, ejusq; punctum a, angulum solidum constitucere, angulo solido dato c æqualem.



Ex f ad planū per c d
c ē ductū, perpendicu-
laris a f g erigatur; a ii. XI.
connectanturq; df, dg,
cf, eg, cg; & abscif-

sa, ah æquali cd, & fiat angulus hai. angulo
dce, æqualis; & recta ai, recta ce æqualis. Ire-
rumq; in plano per ah, ai ductum, constituatur
angulus hal, æqualis angulo dce & al ipsi cg.
Sed ex l ad planum, in quo sunt ah, al, ai; & e-
rigatur perpendicularis lk, quæ ipsi fg ponatur æ-
qualis; & jungatur recta ka. Erit angulus solidus
a, contentus tribus planis hak, hai, & kai æqua-
lis solido dato c. Connexis enim rectis hk, hl, ik, il,
cum latera ah, al, trianguli ahl, æqualia sint
lateribus cd, cg trianguli cdg; anguliq; hal
& cdg æquales ex constructione: & erunt bases
hl, dg æquales. Rursus ablati æqualibus angulis
hal & dce, ex æqualibus hai, dce; relictis

H. h

æqua-

2 + 1.
18. 1.

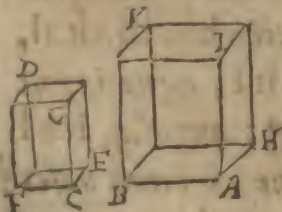
equalibus $la i$, & gce qui comprehenduntur aequalibus lateribus ab , a i ipsis cg , ce : Erunt & li & ge & ae quales. Et sic in triangulis rectangulis hlk , dgf , & ae quales bases, hk , & df ; necrūq; in triangulis rectangulis ahk , & cdf & ae quales bases ak , cf Erunt ergo & hak & dct anguli quales. Deniq; etiam in rectangulis kli & ige bases ki & fe & ae quales. Iterumq; in triangulis kai , & fce , equalium laterum & basium, & ae quales erunt anguli, kai , & fce . Sunt ergo tres anguli plani solidum angulum a includentes, & ae quales tribus planis angulam solidum c includentibus: Et solidus a solido c equalis. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXVII.

Problema 5.

A data recta linea ab , dato solido c & d parallelepipedo, simile & similiterpositum solidum parallelepipedum describere.

26. XI.



12. VI.

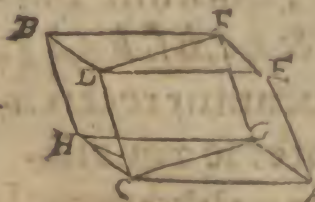
Ad recta ab punctum a , fiat α angulus solidus a equalis angulo solido c , ut tres anguli plani hai , iah , bah ae quales sint tribus angulis planis ecg , gcf , fce . Deinde fiat aut cf ad cg , sic ab ad ai ; & ut cg ad ce , ita ai ad ah : erit

erit ex æquo, ut cf ad ce , ita ab ad ah : Pō-
 stea parallelogrammis completis absolvatur paral-
 lelepipedū ak , quod parallelepipedo cd simile simi-
 literq; positum erit. Cum enim æquales sint anguli γ 24. XI.
 bah , & fce , lateraq; ba , ah , proportionalia δ 9. def. XI
 lateribus fc , ce trū parallelogramma hb , ef Simi-
 lia similiterq; posita: itemq; hi , ey ; & ib , gf :
 quibus tribus similibus similiterq; positis inter se,
 erunt & opposita eorum plana similia similiterq;
 posita: & si solidū ak , cd , similia similiterq;
 posita.

PROPOSITIO XXVIII.

Theorema 23.

Si solidum parallelepipedum ab pla-
 no cf secetur per diagonios cg , df , ad-
 versorum planorum ab , cd : bifa-
 riā secabitur solidum ab ab ipso pla-
 na bc .



Quoniam utraq; cd , gf α 34. I.
 parallela & æqualis est
 ipsi ac ; erunt etiam in-
 ter se parallela & æqua- β 9. XI.
 les, & iusq; connectentes γ 33. I.
 cg , df , parallela, per quas ductum planum cf ,
 bifariam secat ipsum parallelepipedum ab .

Hb

Cum

D 24. XI.

.6. VI.

Ho. def. XI.

Cum enim plana ah , eb sint parallelogramma equalia & similia: erunt & eorum dimidia seu triangula agc , gch ; efd , fdh , equalia, & propter latera circum aequales angulos proportionalia etiam, similia. Cum item & parallelogrammum af , & equale sit, & simile parallelogrammo cb : & ad ipsi gb , & cf commune; erunt duo triangula agc , efd ; & parallelogramma af , ad , cf , prismatis $acgfed$, equalia & similia duobus triangulis, hcg , bdf , & parallelogrammis cb ; bg , cf prismatis $hgdcbf$: Ipsaq; prismata inter se & equalia. Quae cum componant parallelepipedum ab ; Erit ipsum bisariam sectum plano cf .

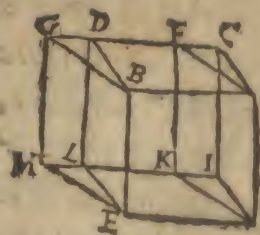
PROPOSITIO XXIX.

Theorema. 24.

Solida parallele pipeda $acde$, $afge$ super eandem basin ab constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes ai , ak , el , em , & hc , hf , bd , bg , lineæ in iisdem collocantur rectis lineis im & cg ; sunt inter se equalia.

a 35. L.

Quia enim equalia sunt parallelogramma al , am , erunt communi trapezio $aklc$ ablato, equalia triangula aik , elm . Quia item equalia sunt



¶ sunt omnia latera triangu-
lorum aik & hcf; item
elm & bdg: erunt & equi-
angula, & propter latera cir-
cum aequales angulos d pro-
portionalia, inter se similia.

34. I.

8. I.

4. VI.

4. XI.

36. I.

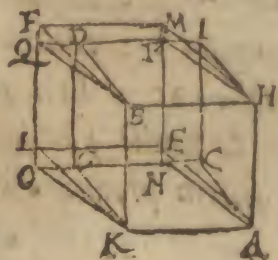
10. def. XI

¶ Rursus & parallelogramma accd inter se sunt
equalia & similia, & sicut & if, & lg propter
equales bases ik, lm: adeoque omnia plana Pris-
matis aik, fch, equalia sunt omnibus planis
Prismatis elm, gdb; ipsaq; prismata equalia.
Quibus si addatur commune solidum ahfk, ldb e;
parallelepipeda super eadem basi in eadem altitu-
dine sunt equalia.

PROPOSITIO XXX.

Theorema 25.

Solida parallelepipeda aidk, amfk
super eandem basin ab constituta &
in eadem altitudine, quorum insi-
stentes ac, ae, kg, kl: hi, hm, bd, bf,
lineæ non in iisdem collocantur re-
ctis lineis cg, id: inter se sunt equalia.



Quia enim plana cd, ef,
opposita basi ab, sunt in co-
dem plano ob eandem pa-
rallelepipedorum altitudi-
nem: pertractis in eodem

Hb 3 plano

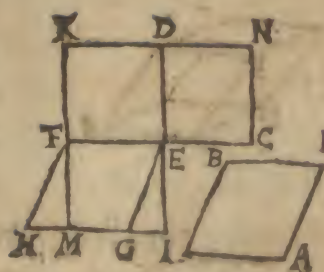
plano rectis cg, id ; illam quidem em & lf pro-
 tracte secant in n & o . hanc vero id in punctis
 p, q : junganturque rectae an, ko, hp, bq . Quia
 34. I. igitur pq, mt rectae sunt aequales & parallelae,
 33. I. sicut & mf, hb : erunt & pq, hb aequales &
 parallelae & $hpqb$ est parallelogrammum. Si-
 cut eadem de causa & $hpna, anok, koqb$.
 Est autem & $noqp$ parallelogrammum. Igitur
 22. XI. $apqk$ est parallelepipedum. Cui aequale est pa-
 rallelepipedum $aidk$, propter eandem basin ab &
 lineas insistentes in iisdem rectis co, iq . Sed &
 eadem $apqk$ propter eandem basin ab , & lineas
 insistentes in iisdem rectis nm, of , aequale est pa-
 rallelepipedum $amfk$. Igitur $aidk$ & $amfk$
 etiam inter se sunt aequalia.

PROPOSITIO XXXI.

Theorema 26.

Solida parallelepipeda super æ-
 quales bases ab, cd , constituta, & in
 eadem altitudine; æqualia inter se
 sunt.

Pro tractis duobus lateribus de, ce ad partes
 e fiat angulus feg æqualis angulo l : recta ef ,
 recta lb ; & recta eg recta la : Erit pa-
 rallelogrammum eh æquale & simile parallelo-
 grammo ab . Conveniat autem producta hg
 cum



cum de in i, & complea-
tur parallelogrammum
ik. Lani conspiciantur
super bases ch, if, ek
æquæ alta parallelepiped-
a ipsis super ab, cd cõ-
structis parallelepipedis,
ut omnium insistentes

linea ad bases sint perpendiculares. Erunt super
ab & ch propter equalia & similia plana inter ^{10. def. XI.}
se æqualia; itemq; super ch & if ^{29. XI.} æqualia. ^{35. I.}
Cũq; parallelogramma eh, cd & fi sint æqualia, ^{7. V.}
eidemq; ek æquale cd; erunt & if æqualia. Erit
igitur, ut if ad ek ita cd ad ek. Sed, ut if ad
ek, ita est solidũ super if, ad solidũ super ek: quia
planum super ef secans totum solidum super ik, est
parallelum planis adversis super dk, im, erectis.
Eademq; ratione ut ed ad ek, ita solidum super
cd ad solidum super ek. Itaq; erit, ut solidũ super
if, ad solidum super ek, ad solidum super cd, ^{9. V.}
ad solidum super ek: Eruntq; solida super if &
cd æqualia. Sed parallelepipedum super if est
æquale parallelepipedo super ab. Aequalia igitur
erunt & parallelepipeda super ab, cd.

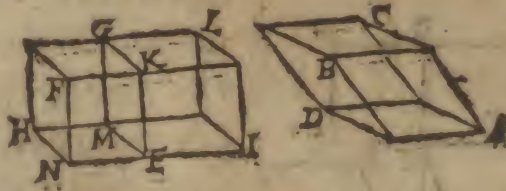
PROPOS. XXXII.

Theorema 27.

Solida parallelepipedaa bcd, e f g h,
sub eadem altitudine, inter se sunt,
ut bases, ab, ef.

Hb 4

Super



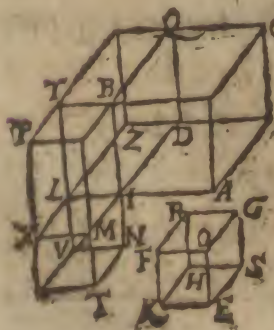
45. I.
31. XI.
7. XI.
25. XI.

Super rectam ek = constitutatur parallelogram-
mum ik aequale parallelogrammo ab in angu-
lo iek , aequali ipsi enf ; ita, ut if fiat unum pa-
rallelogrammum. Completo autem parallele-
pipedo $iflh$; erunt $abcd$ & $iklm$, equalia
& parallelepipeda. Erit igitur ut solidum $iklm$,
ad solidum $efgh$. Sed solidum $iklm$, ad solidum
 $efgh$ est, ut basis ik vel ipsi aequalis ab , ad ba-
sin ef . Igitur etiam solidum $abcd$, ad solidum
 $efgh$, est ut basis ab , ad basin ef .

PROPOS. XXXIII.

Theorema 28.

Similia solida parallelepipeda ab
 cd , $efgh$ inter se sunt in triplicata ra-
tione homologorum laterum $aiek$.



Producatur ai , ad l , ut il
sit equalis ipsi er vel gr .
Item di ad m , ut im sit a-
qualis ipsi hk vel go : Item
 bi ad n , ut in sit equalis ipsi
 kf , vel gs . Et completis pa-
rallelogrammis lm , ln , it ,
perficiatur.

perficiatur parallelepipedum $\tau x i u$. Erunt pa-
 rallelogramma propter angulos & latera equalia
 $i x$ & $g f$, $l n$ & $r s$, $i t$ & $g e$ similia & equalia,
 quib. cū sua opposita in illis parallelepipedis $e f g h$,
 & $\tau x i u$ sint \sim similia & equalia; erunt & ipsa illa $\alpha 24$. XI.
 parallelepipeda inter se equalia & similia. Rursus $\beta 10$. def. XI
 completis parallelogrammis $m b$, $b l$, $l m$, perfici-
 iatur parallelepipedum $m p$, $b l$. Item com-
 pletis parallelogrammis $i y$, $d l$, $i q$ perficiatur
 parallelepipedum $i y q z$. Quoniam ergo ex simili-
 tudine parallelepipedorum $a b c d$, $e f g h$, est; ut $a i$ $\gamma 1$. VI
 $a d c k$, id est, $i l$; ita $d i$ $a d h k$ vel $i m$: & $b i$ $a d$
 $f k$ vel $i n$. Sed ut $a i$ $a d i l$, ita est paralle-
 logrammum $a d a d l$; & ut $d i$ $a d i m$, ita pa-
 rallelogrammum $d l a d l m$; & ut $b i$ $a d i n$, ita $\delta 31$. XI.
 parallelogrammum $b l a d l n$. Erit ergo ut $a d a d$
 $d l$, ita $d l a d l m$, & $b l a d l m$. Sed ut basis $a d a d$
 basin $d l$, ita est parallelepipedum $a d c b$, ad pa-
 rallelepipedum $d l y q$. Atque ut basis $d l$,
 ad basin $l m$, ita parallelepipedum $d l y q$
 ad parallelepipedum $l m b p$: & ut bases $b l$, $l n$;
 ita parallelepipeda $l m b p$ & $n l t x$. Quare erit,
 ut parallelepipedum $a d c b$ ad parallelepipedum
 $d l y q$; ita parallelepipedum $d l y q$ ad $b l b p$,
 & hoc ad $n t x$. Quare quatuor sunt continuè
 proportionales quantitates $a d c b$, $d l y q$,
 $l m b p$, $n t x$: & proportio primæ $a d c b$ ad quartā
 $n t x$, i.e. $a d e f g h$, est triplicata, proportionis
 primæ $a d c b$, ad secundam $d l y q$. Ut autē $a d c b$
 $H b s$ $a d$

ad d l y q. ita est basis a d ad basin d l; & ut a d
ad d l; ita est a i ad i l, id est e k. Est ergo propor-
tio parallelepipedorum a d c b & e f g h, tri-
plicata proportionis homologorū laterum a i & e k.

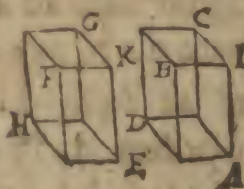
Corollarium.

Datis quatuor lineis continuè pro-
portionalibus, ut est prima ad quartam:
ita sunt parallelepipeda primæ ad quartæ
similia similiterq; descripta.

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema 29.

Æqualium solidorū a d c b, e h z f, paral-
lelepipedorū bases a b, e h, & altitudi-
nes reciprocantur, & quorū solidorū
parallelepipedorū bases & altitudi-
nes reciprocantur, illa sunt æqualia.



Ad bases a b, e h, sint insistentes
a i, e k perpendiculares quæ sunt
parallelepipedorum datorū a al-
titudines: quæ si fuerint æqua-
les, erunt & propter ipsa paral-

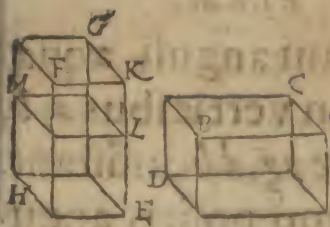
lelepipeda æqualia ipse bases a b, e h æquales. A-
deoq; ut basis a d ad basin e h; ita e k ad a i, id
est, bases & altitudines sunt reciproca.

Si autem altitudines sint inæquales ex e k ma-
jore absindatur ipsi a i æqualis e l, & per ipsi
base e h ducatur planum parallelum l m. Quoni-
am ergo æqualia sunt solida a c d b & e h g f,
& erit ut a c d b, ad e h l m; ita e h g f ad f h l m. & ut

autem

a per 4.
defn. V l.

631. XL.
27. V.



autem solidum $adebad$
solidum $ehlm$; ita e basis
 ad basin eh , propter
altitudines ai , el aequales.
Atq; ut $ehgf$ ad $ghlm$,
ita basis kn ad basin ln .

32. XI.

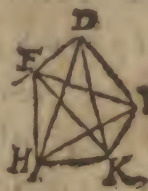
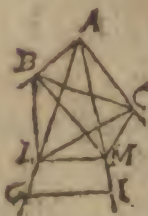
Igitur, ut basis ad ad basin eh ; ita est kn ad ln :
Et sic ek ad el , id est ad ai ipsi aequalem. Quare est,
ut basis ad ad basin eh , ita altitudo ek ad alti-
tudinem ei , id est, reciproca sunt bases altitudinib.
Sint jam bases & altitudines reciproca erunt etiā
parallelepipeda aequalia. Si enim altitudines ek ,
& ai sint aequales, cum sit, ut altitudo ad altitu-
dinē, ita basis ad basin; erunt etiam bases ad , eh ,
aequales & sic parallelepipeda ipsa aequae alta aequa-
lia. Quod si inaequales sint altitudines, absindatur,
ut antea, equalis. Quoniam ergo est ex hypothesi ut
basis ad ad basin eh , sit altitudo ek ad altitudi-
nem ai , id est, el . Et autē est basis ad ad basin eh ,
ita est solidum $adcb$, ad solidum $ehlm$. propter al-
titudines el , ai aequales: Et ut ek ad el , ita kn ad ln .
Et autē kn ad ln ita est solidum $ehgf$, ad solidum
 $ehln$. Ideoq; erit, ut solidū $adcb$, ad solidū
 $ehlm$; ita $ehgf$, ad $ghlm$. Et sic $adcb$ & $ehgf$
sunt aequalia. Poterat idē ostendi si insisteres, vel al-
titudines parallelepipedorū nō sint perpendiculares,
si deinde demittatur perpendiculares. Eadem haec et-
iā de Prismatib; iisdē servatis principijs vera sunt.

PROPOSITIO XXXV

Theorema 30.

Si

Si fuerint duo plani anguli æqua-
les bac, def , quorum verticibus a, b ,
sublimes rectæ lineæ ag, dh , insistant,
quæ cum lineis primò positis angu-
los contineant æquales bag & cag
utrumq; utriq; In sublimibus autem
lineis a, d, g, b quælibet sumpta fuerint
puncta g, b , & ab his ad plana, in qui-
bus cōsistunt anguli bac, def primum
positi, ductæ fuerint perpendicula-
res, gi, hk ; à punctis verò i, k quæ in
planis à perpendicularibus gi, hk fi-
unt ad angulos bac, def primum po-
sitos adjunctæ fuerint rectæ lineæ ia ,
 kd hæc ik, kd cum sublimibus ag, dh
æquales angulos comprehendent.



Si enim ag, dh , sunt
inaequales, auferatur ex
 ag ipsi dh æqualis al , &
ex l ad planum bac de-
mittatur perpendicularis
 lm . Quoniam igitur

gi, lm , sunt ad idem planum perpendiculares, e-
runt æ parallelæ, & in eodem plano trianguli gai
cadet q, lm in rectam ai . Iam ducantur ex pun-
ctis m, k ad rectas ab, ac, de, df perpendicu-
lares.

6 . XI.

lates mb, mc, ke, kf & connectantur rectæ $bc,$
 $bl, lc, ef, eh, hf.$ Es quia lm est ructa ad
 planum anguli b a c ipsa rectum angulum efficiet
 & cum recta a in eodem plano ducta. Quare $\beta 3. def. XL.$
 quadratum al erit & equale quadratis $am, lm:$ $\gamma 74. l.$
 Sed quadratum am est & equale quadratis, $ac,$ $\delta 48. l.$
 $cm.$ Igitur quadratum al equale est quadratis $\epsilon 47. l.$
 $ac, cm, ml.$ At quadratis cm, ml equale $\zeta 4. l.$
 est quadratum $cl.$ Quia, cm l angulus est β rectus. $\eta 8. l.$
 Igitur quadratum al equale est quadratis $ac, cl.$
 Ideoq, acl angulus erit δ rectus. Rursus, quia qua-
 dratum ac equale est quadratis $am, ml:$ Sed
 am & equale est quadratis $ab, bm.$ Igitur qua-
 dratum rectæ al , equale est quadratis rectarum
 $ab, bm, ml:$ at quadratis bm, ml equale est
 quadratum $bl.$ Ergo quadratum al equale est
 quadratis ab, bl angulusq, abl erit δ rectus. Nec
 aliter anguli $d fh,$ & $d eh,$ ostendentur recti. Quo-
 niam itaq, abl & lab anguli trianguli abl sunt
 equales angulis $d eh, h de,$ trianguli $d eh;$
 Sunq, latera ac, dh equalia; erunt & reliqua
 latera $ab, bl,$ reliquis lateribus $d e, he$ equa-
 lia. Eodemq, modo equales erunt rectæ $ac, cl,$
 rectis $df, fh.$ Quare in triangulis abc, def
 equalium laterum $ab, ac,$ ipsis $d e, df,$ & an-
 gulorum b a c ipsi $edf;$ Erunt & bases bc, ef in-
 ter se, & anguli $abc, acb,$ angulis $d ef, d fe,$
 equales. Sunt autem & toti anguli $abm,$
 acm

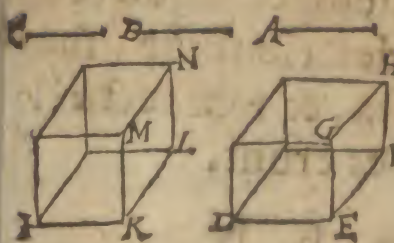
acm aequales totis dek, dfk, cum sint recti. Itaq;
 & reliquum b c & mcb, reliquis ke f, kfe, erunt
 aequales; propterea, cum & latera bc, ef sint o-
 ste sa equa. Erunt latera bm, cmlaterib. ek,
 ik equa. Quia ergo latera ac, cm aequalia sunt
 lateribus df, fk angulib. acm, dfk recti, erunt
 & bases cm, dk aequales. Cum autem aequales sint
 ostense recte bl, ch; erunt & earum quadrata a-
 qualia. Si a quia quadratū bl, aequale est quadra-
 tū bm, ml, & quadratum ch, quadratis ek,
 kn. Erunt & quadrata bm, ml aequalia qua-
 dratis ek, kh. Ablatis ergo quadratis bm, ek
 aequalibus, reliqua quadrata lm hk erunt aequa-
 lia, recte q. lm, hk aequales. Quamobrem
 lm latera al, am aequalia sint lateribus
 dn, dk; & basis lm, basi hk: erunt & an-
 guli am, hd k aequales. Quod erat propositum.

PROPOS: XXXVI.

Theorema. 13.

Si tres rectæ lineæ a, b, c propor-
 tionales fuerint, quod ex tribus his
 fit solidum e b parallelepipedum,
 æquale est descripto à media linea
 b solido parallelepipedo, im, quod
 æquilaterum quidem fit, æquiangu-
 lum vero prædicto.

CXTIII



Cum enim sit, ut d e
H ad i k, ita k m ad e g
(quia d e ipsa, &
i k, k m, ipsi b; & e g
ipsi c sunt & sunt æ-
quales) & anguli d e g
i k m æquales: Erunt a 14. VI.

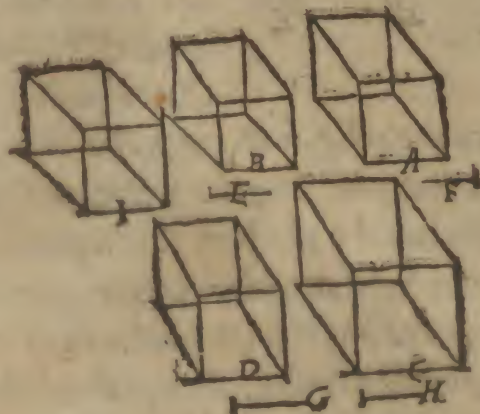
parallelogramma d g, i m, æqualia quia latera
habent circum æquales angulos reciproca. Quoniam
verò anguli plani d e g, i k m sunt æquales, quo-
rum verticibus insistantur sublimes lineæ æquales e f,
k l, quæ æquales angulos comprehendunt cum li-
neis primò positis, utrumq; utriq; ex constructio-
ne: erunt perpendiculares ex f, l, ad plana basium
d g, i m, demissæ, nimirum altitudines parallele-
pipedorum d h, i n, si bases sint d g, i m inter se æ- 35. XI.
quales. Quare parallelepipeda d h, i n, propter ba-
ses d g, i m æquales, & æquales altitudines, inter 31. XI.
se sunt & æqualia. Quod erat propositum.

PROPOS: XXXVII.

Theorema 35.

Si quatuor rectæ lineæ a, b, c, d pro-
portionales fuerint ut a ad b, ita b ad
c & solida parallelepipeda a b c d, quæ
ab ipsis & similia & similiter de-
scribuntur, proportionalia erunt.
Et

& si solida parallelepipeda, quæ & similia similiterq; describuntur, fuerint proportionalia, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.



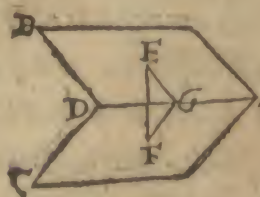
a. 33. XI. Cum eadem sit proportio a ad b , quæ c ad d , eadem quoq; erunt solidorum a ad b , & c ad d , quia sunt proportionēs triplicatæ ejusdem proportionis. Contra cum a ad b , & b ad c solida habeant eandem proportionem triplicatam proportionis lineæ a ad b , & c ad d . Erunt etiam linearū sunt a ad b & c ad d eadem proportionēs.

PROPOS: XXXVIII.

Theorema 33.

Si planum ab , ad planum ac , rectum fuerit, & ab aliquo puncto e eorum, quæ in uno sunt planorum ab
ad

ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem sectionem *ad* cadei planorum ducta perpendicularis.



Si ex puncto *c* dato in plano demissa perpendicularis ad planum *ac* non cadit in communem sectionem *ad*, sed in punctum *f* extra

illum, ducatur ex *e* ad rectam *ad* perpendicularis *eg*, quæ & ad planum *ac* recta erit. Quare ex puncto *c* extra planum *ac* ductæ sunt ad ipsum planum *ac* due perpendiculares *cf*, *fg*. Quod β 13. XI. absurdum.

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema 34.

Si solidi parallelepipedum *ab* eorum, quæ ex adverso planorum *ac*, *bd* latera bifariam secta sint in *i*, *k*, *l*, *m*, *n*, *o*, *p*; per sectiones autem plana *in*, *ko*, sint extensa: communis sectio *rs* planorum, & solidi parallelepipedum diameter *ab* bifariam se mutuo secabunt.

ii

Conn

34. I.

29. I.

4. I.

13. I.

14. I.

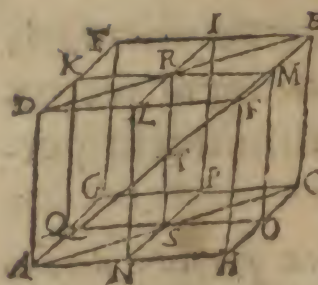
9. XI.

33. I.

7. XI.

29. & 15. I.

26. I.



Connexis enim rectis rb , rd ; sa , sc , in triangulis aq s , co s , propter \propto equalia latera aq , qs ipsis co , os , & angulum aq s pe ae $quale$ alterno angulo co s : Erunt & bases as , cs γ a -

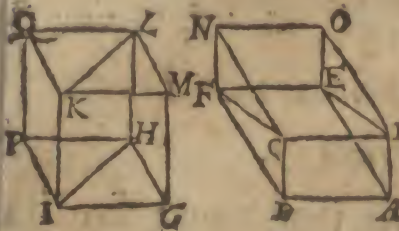
quales, anguliq; asr & cs o a quales. Sed as q & as o sunt duobus rectis δ a quales: igitur & cs o & ao s Ac propterea as , cs unam rectam lineam \circ constituent. Eodẽq; modo a quales ostendentur br , dr ; & unam constitucere rectam bd . Rursus, quia utraq; ad , bc parallela est & a qualis recta fh , ob parallelogramma af , fc ; ipsa quoq; parallela & a quales ζ erunt. Quare & recta ac , bd , earũ extrema cõjungentes, parallela sunt & a quales, ipsarumq; dimidia as , br a quales. Quia verò ac , bd sunt parallela: \circ erunt recta ab , rs in eodem cum ipsis plano. Ideoq; se mutuò secabunt in puncto t . Cum autem duo anguli ast , ats , \propto a quales sint duobus angulis brt & ptr , & latus as lateri br ; \wedge erunt & reliqua latera ta , ts reliquis tb , tr a qualia: ac propterea ab , rs , se mutuò bifariam secant in t . Quod erat propositum. Hinc efficitur in omni parallelepipedo: Diametros omnes se mutuò bifariam secare in uno puncto, in quo bifariam dividuntur.

PROPOSITIO XL.

Theorema 35.

SI

Si fuerint duo prismata $abcdef$,
 $ghiklm$, æqualis altitudinis; quorū
 hoc quidem habeat basin parallelo-
 grammum $abcd$, illud verò trian-
 gulum ghi : duplum autem fuerit pa-
 rallelogrammū $abcd$ trianguli ghi :
 æqualia erunt ipsa prismata.



Perficiatur enim pa-
 rallelepipedum an, gq ,
 extensis triangulorū
 planis, & perfectis
 parallelogrammis bn ,
 ao ; gp, mq : ac du-

ctis on, pq quæ æque alta sunt parallelepipedum
 cum ipsis prismatis. Quoniam igitur parallelogrammum
 gp , æ duplum est trianguli ghi , sed & ac
 parallelogrammum ejusdem trianguli ghi est du-
 plum. Erunt illa inter se æqualia: ipsaq; parallele-
 pipeda æque alta super æqualibus basib. & æqualia,
 & ipsorum dimidia, quæ sunt data prismata, æ-
 qualia. Quia parallelepipedum am, gk per diame-
 tros cf, de, hi, lk planorum adversorum secan-
 tur bisariam in bina videlicet prismata. Quod erat
 propositum. Quæ demonstratio ostendit, propositio-
 nem tantummodo loqui de illis prismatis, quæ duo
 triangula habent opposita, quia jubet parallelepi-
 peda compleri, quod non fieret, nisi utrumq; prisma
 opposita haberet triangula, quia jam antea esset
 completum, parallelepipedum



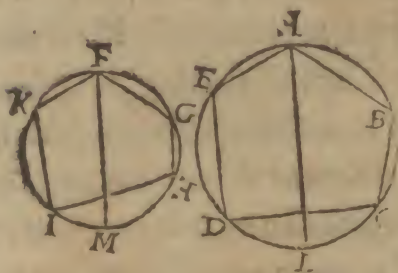
EUCLIDIS ELEMENTO- RUM

LIBER XII.

PROPOSITIO I.

Theorema 1.

Quæ in circulis polygona similia
bcde, fg h i k, inter se sunt, ut à
diametris *al, fm* quadrata.



Angulis equali-
bus *abc, fgh*,
subtendantur rectæ
ac, fh; & conne-
ctantur rectæ *bl*,
gm. Quoniam ob
similitudinem poly-

gonorum est, ut *ab ad bc*; sic *fg ad gh*: erunt
æ triangula *abc, fgh*, æqui angula. Est autem
angulus *acb*, æ equalis angulo *alb*; & *fgh*,
ipsi *fm g*. Erunt igitur & *alb* & *fm g* æqua-
les, Sed cum & anguli *abl, fm g*, sint & æquales,

tan-

æ 6. VI.

β 21. III.

γ 31. III.

tur. Sit ergò i minor circulo efgh, magnitudine k
ut quidem i & k simul sint circulo efgh aqua-
les. Circulo ergò efgh inscribatur quadratum
efgh, quod quia quadrati, circuli eidem circum-
scripti, dimidium est, majus erit semicirculo. Iam
bifecietur peripheria ef, fg, gh, he, in punctis l,
m, n, o; adjungaturq; rectæ le, lf, mf, mg, ng,
nh, ho, oe: Ducaturq; per l Tangens tu, qua
ipsi ef crit parallela, occurrens rectis he, gt Pro-
tractis in t & p. Quoniam itaq; triangulum elf,
dimidio est parallelogrammi tefu, majus erit
dimidio segmenti elf: & sic reliqua singula trian-
gula dimidiis segmentorum sunt majora, & omnia
simul majora dimidio omnium segmentorum simul.
Eodemq; modo bifectis hisce peripherijs el, lf, ite-
rum adjunctæ lineæ efficerent triangula dimidiis se-
gmentorum majora. Quoniam autem si à circulo
efgh, auferatur plus dimidio, nempe quadratum
efgh, & à reliquis segmentis rursus plus dimi-
dio, nempe triangula elf, fmg: & in hunc mo-
dum semper fiat detractio, tandem relinqueretur
minor magnitudo quam est k excessus inter circu-
lum efgh, & magnitudinem i. Sint itaq; se-
gmenta circuli relictæ el, lf, fm, simul sumta
minora magnitudine k. Cum ergò circulus efgh,
ponatur æqualis ipsis i & k: simul segmenta illa
minora magnitudine k, subtracta ex circulo, re-
linquunt polygonum elfmgnho, majus ma-
gnitudine reliqua i. Huic polygono simile inscri-
batur

atur circulo $abcd$. Quoniam hæc polygonæ inter
 sunt ut ex eorundem circulorum diametris qua-
 trata id est n : ut circulus $abcd$ ad i sed polygo-
 num $apbqcrds$, minus est circulo $abcd$. θ I. 14. V.
 igitur & polygonum, $elfm$, $gnho$, minus erit
 quam i ; quod tamen modo demonstratum est ma-
 ius. Quod absurdum. Deinde magnitudo i pon-
 tur major circulo $efgh$. Cum itaq; ponatur $abcd$
 circulus ad i ut quadrata diametrorum ac & eg :
 erit & convertendo i ad circulum $abcd$, ut ex
 eg & ac diametrorum quadrata. Ponatur autem
 circulus $efgh$, ad magnitudinem k , ut i ad cir-
 culum $abcd$. Quoniam ergo i est major circulo
 $efgh$, major etiam a erit circulus $abcd$ ma-
 gnitudine k . Itaq; erit ut diametrorum eg ,
 ac , quadrata, ita circulus $efgh$, ad magnitudi-
 nem k minorem circulo $abcd$. Quod absurdum.
 Quia ostensum modo est, non posse esse, ut qua-
 dratum diametri ad quadratum diametri; ita
 circulum ad magnitudinem minorem circulo. Sic
 patet etiam, nunquam habere posse quadrata duo-
 rum circulorum eandem rationem, quam circulus
 prior ad magnitudinem posteriore maiorem. Idem
 enim sequetur absurdum, ut quod quadratum dia-
 metri ac ad quadratum diametri eg , habeat e-
 andem rationem, quam circulus $abcd$, ad magni-
 tudinem circulo $efgh$ minorem: quod falsum es-
 se jam constat. Cum ergo magnitudine i , neq; maior
 neq; minor esse possit circulus $efgh$; patet, eandem esse

circularum rationem, quæ & ex ipsorum diametris, quadratorum. Hinc etiam patet-

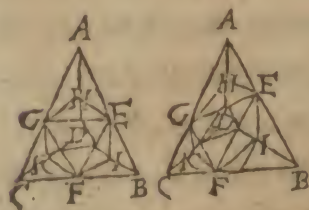
Corollarium.

Esse circulum ad circulum, ut polygona similia ipsis inscripta, quia ipsa quoq; sunt ut ex diametris quadrata.

PROPOS: III.

Theorema 3.

Omnis Pyramis $abcd$, triangularem habens basin abc dividitur in duas pyramides $aegh, hiked$ æquales & similes inter se, triangulares habentes bases aeg, hik , & similes toti, & in duo prismata $ebfghi, c fghik$ æqualia; quæ duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.



Omnia latera pyramidis secantur bisariam in e, f, g, h, i, k . connectanturq; $ef, fg, ge, hi, ik, kh, he, ei, if$: erunt duæ pyramides $aegh, hiked$, & æquales & similes inter se &

Et toti: Sicut & duo prismata $abfghi$, $c fgh$
 ik inter se equalia, & majora dimidio totius pyra-
 midis. Quia enim ad , bd , latera secta sunt bise-
 ctis, & sic proportionaliter, $erunt hi$, ab , pa-
 rallela. Eademq; ratione parallela ik , bc ; hk ,
 ac ; eg , bc ; ef , ac ; fg , ab ; eh , bd ; ei , ad ;
 if , dc ; hg , dc ; δ Sunt autem & fg , hi , inter
 se parallela, quia eidem ab , parallela sunt. Sicut
 & gh , fi , quia eidem dc . Sunt ergo parallelo-
 grammata $aeih$, $hebi$, $idhe$, $ebfg$, $ghkc$,
 $ckif$, $fghi$. Quia verò he , hg rectis db , bc
 sunt parallela: & erunt anguli ehg , bdc aequales: & 10 . XI,
 sicut & heg , dbc & hge , $dc b$. δ Sunt ergo δ 4. VI.
 triangulorum heg , dbc latera circum aequales
 angulos proportionalia, & triangula similia. Sed
 & triangula hae , hag , aeg ; triangulis dab ,
 dac , abc sunt δ similia: Sunt ergo pyramides δ 9. def. XI.
 $aegh$, $abcd$ similes. Rursus, quia recta hi , hk ,
 rectis ab , ac , sunt parallela; erunt anguli ihk ,
 bac aequales: & Itemq; hik , abc ; hki , acb .
 Quare triangula hik , abc habent circum a-
 quales angulos latera proportionalia, & sunt si-
 milia. δ Sunt autem & triangula dhi , dik ,
 dkh , triangulis dab , dbc , dca similia: Itaq;
 pyramides $hikd$, $abcd$ sunt similes. Quo-
 niam autem triangula ahe , hdi , δ sunt similia
 triangulo adb ; ipsa etiam inter se δ erunt simi-
 lia. Et quia super aequales rectas ah , hd , sunt
 constituta: & erunt etiam equalia. Itaq; etiam δ Lemma
 ahg , 22 . VI.
 li 5.

p. 14. I.

* 10. def. XI.

a. 8. I.

* 15. XI.

p. 41. I.

* 49. XI.

ahg , $hd k$, triangula similia, super aequales bases ah , hd constituta sunt etiam aequalia; ut & aeg & hik , super ae & hi aequales. Et denique chg , idk , super he , duo aequales, aequalia sunt. Itaque Pyramides similes $aegh$, & $hikd$, etiam sunt aequales. Rursus quia eh , hg , ge , sunt aequales & parallela rectis bi , if , fb : & erunt triangula chg , bif , equiangula inter se & aequalia & similia. Sunt etiam parallela, quia eh , hg , per quas planum chg est ductum, parallela sunt rectis bi , if , per quas planum bif est ductum. Igitur solidum bif , ghc , sub duobus his triangulis ex adverso aequalibus parallelis & similibus, & tribus parallelogrammis $egfb$, $bchi$, $ifgh$, contentum est prisma. Eodemque modo propter triangula cfg , hik , ex adverso & aequalia parallela & similia, & propter parallelogramma $cfik$, $khgc$, $ifgh$, quibus continetur; solidum cfg , hik , est prisma. Quod cum cum priore bif , ghe sit ejusdem altitudinis, utpote inter plana parallela bce , hik & parallelogrammum $ebfg$ est duplum trianguli cfg , & erunt haec inter se aequalia. Denique quia prisma $ebfghi$ majus est pyramide $ebfi$; totum parte, quae aequalis & similis est pyramidibus $aegh$, & $hikd$. Ex equalitate & similitudine triangulorum erunt illa duo prismata pyramidibus $aegh$, & $hikd$

majora

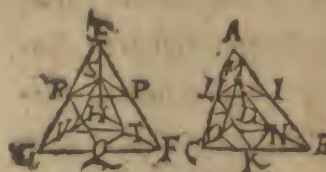
majora: adeoque excedent quidem dimidium, pyramidis $abcd$: hæc verò à dimidio ejus deficient. Totum enim in partes inæquales diviso, dimidium quidem superat pars major: seu à dimidio deficit minor.

PROPOSITIO IV.

Theorema 4.

Si fuerint duæ pyramides $abcd$, $efgh$ ejusdem altitudinis, triangulares habentes bases abc , efg ; Sit autem illarum utraque divisa & in duas pyramides $ailm$, $mnod$, & $eprs$, $stuh$, æquales inter se & similes toti & in duo prismata æqualia $ibklmn$, $cklmno$, & $pfqrst$, $gqrstu$, ac eodem modo divisa sit utraq; pyramidum $ailm$, $mnod$ & $eprs$, $stuh$, quæ ex superiore divisione natæ sunt, idq; semper fiat; erit, ut unius pyramidis $abcd$ basis abc , ad alterius pyramidis $efgh$ basin efg ; ita & omnia, quæ in una pyramide prismata ad omnia, quæ in altera pyramide prismata multitudine æqualia.

Con-



Constructio cum prece-
dente coincidit. Cum ergo
sit, ut $bcadck$ ita $efgadr$
gr. Quia utraq, bc &

44. VI.

fg linea est bisariam secta: a Sint autem abc ,
 lkc : itemq, efg & $r qg$ similia, similiterq, po-
sita; β erit, ut abc , ad lkc , ita $efgadr$ qg.

β 22. VI.

75. VI.

Et permutando, ut $abcadefg$, ita $lkcadr$ qg.
Sed ut $lkcadr$ qg, ita est prisma $cklmno$,
ad prisma $gqrst$ ita etiam prisma $ibklmn$,
ad prisma $pfqrst$, tanquam illis equalia. Et ne-
unum prisma $ibklmn$, ad unum prisma pfq
 rst : ita sunt duo prismata $ibklmn$, ckl
 mno , ad duo prismata $pfqrst$, $gkrtsu$. E-
runt igitur duo prismata in pyramide $abcd$, ad
duo prismata in pyramide $efgh$, ut basis $abcd$,
ad basin $efgh$. Eodem modo demonstratur, ita
esse duo prismata in pyramide $ailm$, mno d,
factis in pyramide $abcd$, ad bina prismata in
pyramidibus $eprs$, $stuh$ factis in pyramide
 $efgh$, ut sunt pyramidum illarum bases ail , &
 mno , ad bases harum epr & stu . Et sic
porro eadem adhibita divisione. Sed ut sunt illae
bases, ad has: ita est lkc , basis, illis equalis, &
similis, ad basin $r qg$, his similem & equalem, hoc
est, ita est abc ad efg . Itaq, erunt quoq, pris-
mata cuiuslibet pyramidis facta, in pyramide ab
 cd , ad prismata cuiuslibet pyramidis facta in py-
ramide $efgh$, ut basis abc , ad basin efg .

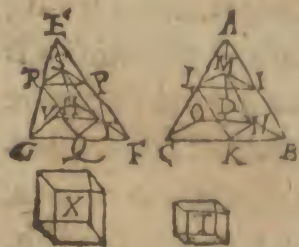
46.

ac propterea erunt etiam, ut prismata pyramidis
 $abcd$ ad prismata pyramidis $efgh$; ita prisma-
 ta tam pyramidis $ailm$, ad prismata pyramidis
 $eprs$, quàm prismata pyramidis $mno d$, ad
 prismata pyramidis $stuh$: & sic deinceps. Qua-
 re, cum sint, ut duo prismata pyramidis $abcd$,
 ad duo prismata pyramidis $efgh$: γ Ita omnia
 prismata in pyramidibus $abcd$, $ailm$, $mno d$
 simul, ad omnia prismata in pyramidibus $efgh$, γ 12.V.
 $eprs$, $stuh$ simul: si hæc illis multitudine sint æ-
 qualia. Erunt etiam, ut basis abc , ad basin efg ;
 ita omnia prismata in pyramide $abcd$, ad o-
 mnia prismata in pyramide $efgh$. Quod erat
 propositum.

PROPOS: V.

Theorema. 5.

Sub eadem altitudine existentes
 pyramides $abcd$, $efgh$, & triangula-
 res habentes bases abc , efg , inter se
 sunt, ut bases.



Sin minus, esto, ut basis
 abc ad basin efg ; Ita
 pyramis $abcd$, ad soli-
 dum x , quod majus vel mi-
 nus est pyramide $efgh$.
 Sit primò minus magnitu-
 dine y .

3. XII.

dine y . & Dividatur ergò pyramis $efgh$ in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia. Rursusq; hæ factæ pyramides in aliis duas pyramides & prismata æqualia, & sic deinceps. Quoniam igitur, si à pyramide $efgh$, auferatur plus quàm dimidium, duo nempe prismata $pqrst$, $gqrstn$, & majora dimidio pyramidis $efgh$:

1. X.

Itemq; è reliquis pyramidibus $eprs$, $stuh$, plus dimidio, utpote illarum prismata; Et sic deinceps; & relinquitur tandem minor magnitudo, magnitudine y , seu excessu, quo pyramis $efgh$, superat solidum x . Relicta ergò magnitudo jam sit minor. Cum verò pyramis $efgh$, ponatur æqualis solidis x & y : Erunt reliqua prismata in pyramide $efgh$, majora solido x . Dividatur pyramis $abcd$ in duas pyramides æquales & duo prismata æqualia: Itemq; factæ pyramides $ailm$, $mnod$, in binas pyramides æquales, & bina prismata æqualia. Quod toties fiat; quoties in pyramide $efgh$ est factum. Quoniam ergò omnia prismata in pyramide $abcd$, ad omnia prismata numero æqualia, in pyramide $efgh$ sunt, ut basis abc , ad basin efg , id est, ut pyramis $abcd$, ad solidum x ; omniaq; prismata in pyramide $abcd$ minora quam pyramis tota $abcd$: & erunt etiam omnia prismata in pyramide $efgh$, minora solido x ; quæ tamen modo ostensa sunt majora. Minus ergò nequit esse solidum x pyramide $efgh$.

4. XII.

14. V.

Deinde

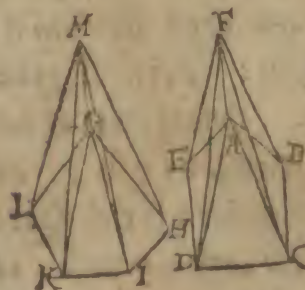
Deinde sit eadem majus. Quoniam ergo ponitur
 pyramis $abcd$, ad solidum x , ut basis abc , ad
 basin efg . Erit convertendo solidum x , ad
 $abcd$, ut efg , ad abc . Ponatur autem so-
 lidum x , ad pyramidem $abcd$, ut $efgh$ pyra-
 mis, ad solidum y . Quoniam ergo solidum x ,
 majus ponitur pyramide $efgh$: & erit & pyra-
 midis $abcd$ major solido y . Quare erit, ut ba-
 sis efg ad basin abc ; ita pyramis $efgh$, ad
 solidum y , quod minus est pyramide $abcd$. Quod
 absurdum. Quia ostensum est, esse non posse, ut
 basis ad basin, ita pyramidem ad solidum pyramide
 minus. Cum ergo pyramis $efgh$ nec minor nec
 major sit solido x , erit ipsi equalis. Erit ergo,
 basis abc , ad basin efg , ita pyramis $abcd$,
 ad pyramidem $efgh$, id est ad x . Manifesta et-
 iam hinc est conversa, quod si pyramides trian-
 gulares sint ut bases, quod sint sub eadem altitu-
 dine. Et quod si pyramides super eadem sive equa-
 libus basibus, ejusdemque sint altitudinis, etiam sint
 aequales.

PROPOSITIO VI

Theorema 6.

Sub

Sub eadem altitudine existentes
pyramides $abcdef, ghiklm$ & poly-
gonas habentes bases $abcde, ghikl$;
inter se sunt ut bases.



Resolutis basibus in trian-
gula numero equalia: erit
qualibet pyramis divisa in
totidem pyramides trian-
gulares. Quia verò est, ut
basis abc , ad basin acd ;
ita pyramis abc , ad py-

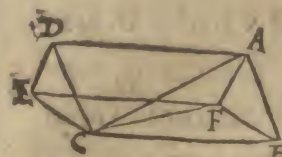
ramidem acd . Rursusq; ut bases acd , ade ,
ita pyramides acd , ade . Igitur ex aequo, ut
 $abcd$, ad ade ; ita $abcd$, ad aed . Et
componendo, ut bases $abcde$, ade ; sic pyra-
mides $abcde$, & aed . Similiter erit, ut ba-
ses $ghikl$, & gkl ; ita pyramides $ghiklm$,
& $gklm$: Et convertendo, ut bases gkl , ghi
 kl , $ghikl$; ita pyramides $gklm$, &
& $ghiklm$. Rursus quoniam est, ut ba-
ses, ade ad gkl ; ita pyramides ade , ad gk
 lm : erunt quatuor bases, $abcde$, ade , gkl ,
 $ghikl$, cum quatuor pyramidibus $abcde$, ad
 ef , $gklm$, $ghiklm$, in eadem ratione. Erit
ergò ex aequo, ut bases $abcde$ ad $ghikl$; ita py-
ramides $abcde$ ad $ghiklm$. Quod erat
propositum.

PRO-

PROPOSITIO VII.

Theorema 7.

Omne prisma $abcdef$, triangularem habens basin, dividitur in tres pyramides $abcf$, $adcf$, $efdc$ æquales inter se, triangulares bases habentes.



Ducantur in tribus parallelogrammis tres diagoni $a c$, $c f$, $f d$, æ dividentes eam in trian-

34. L

gula inter se equalia. Est ergo, ut bases abc , adc æquales; ita pyramides $abcf$, $adcf$ ejusdem altitudinis, quæ est perpendicularis ex f demissa in planum $abcd$ æ- §. X.
quales. Ita etiã æquales sunt pyramides $adcf$, $efdc$, super æquales bases adf , $d cf$ constitutæ, sub eadẽ altitudine, seu perpendiculari à vertice c ad planũ $adef$ demissa. Sed pyramis $adcf$, est eadẽ pyramidi $adfc$, quippe ysdem contenta planis. Igitur tres pyramides $abcf$, $adcf$, $efdc$ vel $cdef$, æquales inter se sunt; & sic prisma $abcdef$ in tres æquales pyramides est divisum. Unde patet: Quamque pyramidem esse tertiam partem prismatis eandem cum ipsa habentis basin & altitudinem.

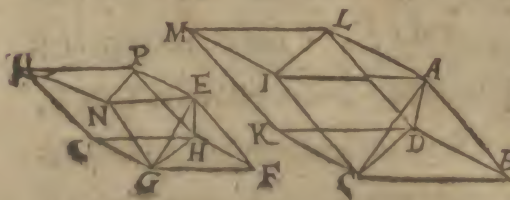
PROPOS: VIII.

Theorema 8.

K k

Similes

Similes pyramides $abcd, efgh$,
quæ triangulares habent bases abc ,
 efg ; in triplicata sunt homologorum
laterum bc, fg , ratione.



Extendantur
plana triangu-
lorum abc, c
 $def, d a b$, per-
ficianturq; pa-

rallelogramma bi, bk, bl : & ducantur rectæ
ipsis ai, al æquales & parallele lm, im : conne-
ctaturq; km , ut parallelepipedum completum sit
 bm ejusdem altitudinis cum pyramide, ut paralle-
la plana a ostendunt. Eodemq; modo perficiatur
parallelepipedū fq . Quoniam igitur propter simili-
tudinem pyramidum & anguli abc, efg sunt æ-
quales; estq; ut $ab ad bc$, ita $ef ad fg$; erunt
parallelogramma bi, fn similia: Ita, cum anguli
 abd, efh sint æquales; & sit, ut $ab ad bd$, ita
 $ef ad hf$: itē anguli dbc, hfg æquales, & sit ut
 $db ad bc$, ita $hf ad fg$; erunt & parallelogram-
ma bl, bk parallelogrammis fp, fo similia. Sed
tam tria bi, bk, bl , parallelepipedi bm , reli-
quis tribus oppositis dm, am, cm ; quàm tria
 fn, fo, ep , parallelepipedi fq , reliquis oppo-
sitis tribus hq, fq, gq , sunt æqualia & similia;
adeoq; sex plana parallelepipedorum bm , & fq
sunt.

sunt inter se similia ipsaq; parallelepipedâ simi-
 lia. Quoniam vero ductis rectis li , pn , Prisma- 79. def. XI.
 $tadbcila$, $hfgnpe$ habent δ eandem pro- δ 15. V.
 portionem, quam ipsorum dupla $b m$ & $f q$. Et
 pyramides $abcd$, $efgh$, eandem quam prisma-
 ta dicta earum tripla: habebunt quoq; pyrami-
 des eandem proportionem, quam parallelepipedâ. 11. V.
 § Sed cum proportio parallelepipedorū bm , $f q$ sit § 33. XL
 triplicata rationis homologorum laterum bc , fg :
 erit etiam proportio pyramidum triplicata eorun-
 dem laterum bc , fg . Quod ipsum quoq; locum
 habet in pyramidibus similibus plurium laterum,
 sicut & in prismatibus similibus.

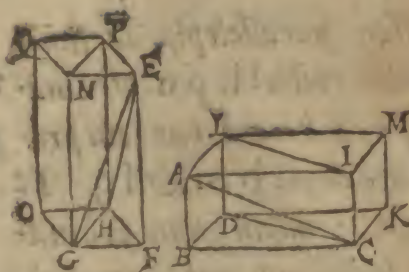
PROPOS: IX.

Theorema 9.

Æqualium pyramidum $abcd$, ef
 gh , & triangulares bases abc , efg
 habentium, reciprocantur bases &
 altitudines; & quarum pyramidum
 triangulares bases habentium reci-
 procantur bases & altitudines, illæ
 sunt æquales.

Kk

Perfici



Perficiantur, ut in
precedenti, parallele-
pipeda $b m, f q$, ea-
rundem altitudinum
cum pyramidibus;
connectanturq; rectæ
 li, pn ; erunt pris-

α 34. XI.

β 15. V.

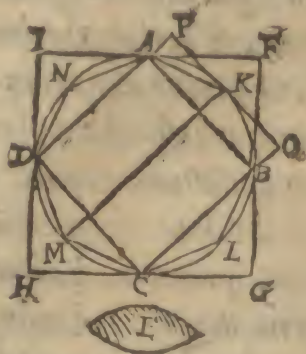
mata $dbc il a, hfg npe$, tanquam tripla
pyramidum equalium, inter se equalia ipsaq; pa-
rallelepipeda $b m, f q$ prismaticum dupla equalia:
Eorum itaq; bases reciprocantur altitudinibus,
id est, erit, ut basis bi , ad basin fn : ita altitudo
solidi $f q$, ad altitudinem solidi $b m$. β Sed ut sunt
bases bi & fn , ita sunt triangula abc, efg .
Itaq; ut sunt bases abc, efg ; ita sunt altitudi-
nes pyramidum $efgh$ & $abcd$. Quippe eadem
cum parallelepipedorum altitudinibus; & sic reci-
procatur bases altitudinibus. Iam sint bases & alti-
tudines reciproca. Erunt etiam pyramides equa-
les. Constructa figura ut prius, cum sit, ut abc
ad efg ; ita parallelogrammū bi , ad fn . Sintq; e-
adem altitudines parallelepipedorum & pyrami-
dum; erunt etiam bases & altitudines parallelepi-
pedorum reciproca; Et sic α equalia $b m, f q$.
Quare & ipsorum dimidia prismata, & horum par-
tes tertiae pyramides, sunt equales. Quod ipsum
de reliquis non triangularibus pyramidibus & pris-
matis quibuscunq; potest ostendi.

PRO.

PROPOSITIO X.

Theorema. 10.

Omnis conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basin $abcd$, habentis & altitudinem æqualem.



Sin minus est cylindrus cono triplus, erit vel major vel minor triplo cono. Sit ergo major magnitudine c , & sic æqualis triplo cono & magnitudini e simul. Circulo ceu basi utriusq; inscribatur quadratū

$abcd$, & circa eundem quadratum $fg hi$, super quæ quadrata intelligantur sub altitudine cono & cylindri erecta duo parallelepipeda. Quoniam igitur quadratum $abcd$, æ dimidium est quadrati $fg hi$; 3 estq; ut basis ad basin: ita parallelepipedū, ad parallelepipedum ejusdē altitudinis. Erit etiam unū alterius duplum. Et minus super basi $abcd$, majus dimidio cylindri. Iam secentur peripheriæ ab , bc , cd , da , bifariam in punctis k , l , m , n : junganturq; rectæ ka , kb , lb , lc , mc , md , nd , na , & per k agatur tangens op , & parallela ipsi ab , occurrens rectis da , cb productis in punctis q , p : & super akb , $abop$, intelligantur prisms

29. IV.

32. XI.

27. III.

Kk. 3

mata

4. I.

7. XII.

per 1. X.

smata aequè alta cono vel cylindro. Quoniam ergò
 a k b est dimidium a b o p, erit & illius pri-
 sma hujus dimidium. Eritq; prisma basis
 a k b majus, quàm dimidium segmenti cylindri,
 cujus basis continetur linea a b, & arcu a l b.
 Quod ipsum de reliquis segmentis tribus verum est.
 Eruntq; omnia prismata quatuor triangulorum si-
 mul majora dimidio, omnium segmentorum cylin-
 dri simul. Idemq; sequeretur, si peripheria hæ-
 iterum bifariam secarentur, & fierent alia trian-
 gula &c. Si ergò à cylindro, cujus basis est circulus
 a b c d, auferatur plus, quàm dimidium, ut paral-
 lelepipedum basis a b c d, & à reliquis segmentis
 plus, quàm dimidium, nimirum prismata basium
 a k b, b l c. Et sic fiat ulterius deductio: & relin-
 quitur tandem minor magnitudo, quàm e, exces-
 sus cylindri supra triplū coni. Sint jã segmenta cy-
 lindri relictæ basium a k, k b, b l simul, sumpta
 minora, quàm e. Cùm ergò cylindrus ponatur æ-
 qualis triplo coni & magnitudini e simul, ablati
 segmentis illis ex cylindro & ex triplo coni una cum
 magnitudine e, ipsa e, quæ major est dictis segmen-
 tis erit reliquum prisma basis multangula a k b l,
 c m d n, ejusdem altitudinis cum cono & cylindro,
 majus quàm reliquum triplū coni. Erit itaq; conus
 minor tertia parte Prismatis seu Pyramide, cujus
 eadem ipso cū est basis & altitudo, totum parte mi-
 nus, quod absurdum. Non ergò major est cylindrus
 triplo coni.

Sit

Sit jam minor, & sic conus major tertiâ parte cylindri magnitudine e, ut conus sit equalis tertiâ parti cylindri, & magnitudini e simul. Constructis ijsdē Pyramis super æ dimidia basi a b c d descripta erit & dimidia pyramidis super f g h i. Majorque pyramis super a b c d, coni super a b c d o G. XII. circulo descripti dimidio. Rursus jam, ut antea, divisis peripheriis, & completis triangulis, pyramis super a k b major est dimidio segmenti coni æquæ alti, super basi linea a b & peripheria a k b contenta. Quod ipsum de reliquorum triangulorum pyramidibus, & segmentorum conis dimidijs verum est. Quæ omnes pyramides simul majores sunt quam dimidia omnium segmentorum coni simul. Idem sequeretur, si peripheria hæc rursus secaretur bifariam. Si jam ex cono super circulo a b c d facto auferatur pyramis dimidio major, cujus basis a b c d æquæ alta: relinquitur minus dimidio, & à reliquis segmentis iterum plus dimidio, ut pyramides super a k b, b l c, c m d &c. Et sic ulterius fiat detractio, & relinquitur tandem minor magnitudo quam e, excessus coni supra tertiam partem cylindri. Sint jam segmenta coni relictæ a k, k b, b l simul sumpta minora quam e. Cum igitur Conus ponatur equalis cylindri parti tertiæ, & magnitudini e simul; Si ex cono detrahantur segmenta prædicta, & ex tertia parte una cum magnitudine e, quam major est præfatis coni segmentis

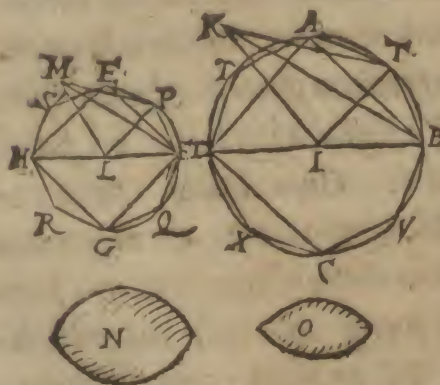
K k 4. eris

erit reliqua pyramis, cujus basis polygonum $akbl$,
 $cm dn$, ejusdem altitudinis cum cono & cylindro,
 major tertia parte cylindri reliqua. Et sic triplum
 pyramidis majus cylindro. Proinde cum prisma
 ejusdem bascos cum pyramide, & altitudinis cum
 cono & cylindro, triplum sit pyramidis: erit pris-
 ma majus cylindro, pars toto. Non ergo cylindrus
 est minor triplo coni. Sed neq₃ major, ut antea pa-
 tet. Ergo equalis. Et sit conus quilibet cujusbet cy-
 lindri æquæ alti, & ejusdem basis, est pars tertia.
 Quod erat propositum.

PROPOSITIO XI.

Theorema II.

Sub eadem ik , lm , altitudine exi-
 stētes coni & cylindri inter se sunt ut
 bases $abcd$, $efgh$.



Sin minus, esto, ut
 basis $abcd$, ad ba-
 sin $efgh$, sic Conus,
 super $abcd$, ad a-
 l'am magnitudinem
 n , quæ vel minor
 vel major est cono
 $efgh$. Sit ergo
 minor.

minor magnitudine \circ , ut conus sit equalis ipsis n
 & \circ simul. Inscripto quaretrato $efgh$ in circulum,
 secantur quadrantes bisariam in p, q, r, s , quae pun-
 cta connectantur cum e, f, g, h . Quoniam ergo, si
 ex cono $efgh$ m detrahatur pyramis, super basin
 $efgh$ ejusdem altitudinis, & à reliquis segmen-
 tis auferantur pyramides ejusdem altitudinis basi-
 um epf, fqg : eodemq; modo semper fiat, detra-
 ctio, semperq; plus dimidio subtrahatur, ut in
 precedenti propositione; & relinquitur tandem mi-
 nor magnitudo quam \circ , excessus coni $efgh$ m
 super n . Sint ergo relictæ segmenta basium coni $ep,$
 pf, fq simul sumpta minora quam \circ . Cum igitur
 Conus $efgh$ m ponatur equalis ipsis n & \circ
 simul; si ex cono detrahantur dicta ipsius segmen-
 ta, sed ex n & \circ simul ipsa \circ major dictis segmentis
 simul, erit reliqua pyramis cujus basis est polygonum
 $epfqghs$ ejusdem altitudinis cum Cono, major
 quam n . Huic ergo polygono simile inscribatur et-
 iam circulo, $abcd$, ut in secunda propositione est
 factum, & ducantur diametri $bdfh$. Quoniam
 ergo est, ut circulus $abcd$, ad circulum $efgh$; ita
 polygonum $atbucxdy$, ad polygonum $epfq$
 $grhs$. Sed ut est circulus, ad circulum; ita poni-
 tur conus $abcdk$, ad magnitudinem n ; & ut
 polygonum ad polygonum: ita est pyramis ad py-
 ramidem ejusdem altitudinis cū Conis. Erit etiam
 pyramis ad pyramidem, ut conus $abcdk$ ad
 kk s. n. Cūq;

a. 1. XI.

p. 2. XII.

d. 6. XII.

n. Cumq³ Conus $abcdk$ sit major pyramide $atbucxdyk$: δ erit & n major pyramide $epfqgrhsm$: qua tamen modo ostensa est minor. Quod absurdum. Non ergo minor est n, quam conus $efghm$. Hinc ponatur major magnitudo n cono $efghm$. Cum sit, ut circuli, $abcd$, ad $efgh$; ita conus $abcdk$ ad n: etiam convertendo erit, ut circuli $efgh$, ad $abcd$; ita n ad conum $abcdk$; Iam ponatur: ut n ad Conum $abcdk$; ita conus $efghm$ ad o: Et quia n major ponitur cono $efghm$; δ erit conus $abcdk$ major, quam o, Quare erit, ut circuli; $efgh$, ad $abcd$: ita conus $efghm$, ad magnitudinem o, quae minor cono $abcdk$ est. Quod absurdum, quia ostensum modo est, non posse esse conum ad magnitudinem minorem alio cono, ut basis est huius coni, ad basin illius coni. Itaq³ n non est major $efghm$: ac proinde aequalis. Quare cum sit, ut circuli $abcd$, ad $efgh$: ita conus $abcdk$ ad n, id est: ad conum $efghm$: erit, ut basis ad basin, ita conus ad conum, si sint aequè alti. Cumq³ superijsdē basibus aequè alti cylindri cum conis sint ζ eorum tripli. n Erit etiam, ut basis ad basin, ita cylindrus ad cylindrum, si sint aequè alti.

67. V.

210. XII.

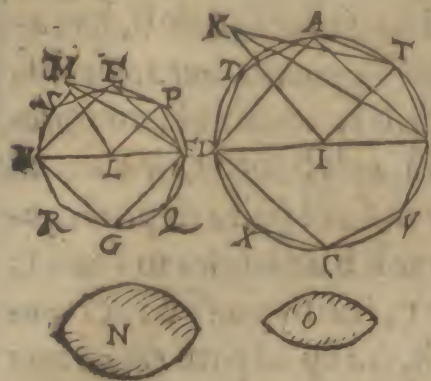
215. V.

PROPOSITIO XII.

Theorema 12.

Similes

Similes Coni & Cylindri in tripli-
cata ratione sunt diametrorum bd ,
 fh , quæ in basibus $abcd$, $efgh$.



Sin minus, habe-
at conus $abcdk$,
ad aliquam magni-
tudinem n , tripli-
catam rationem di-
ametrorum, bd ,
 fh ; erit ergo n vel
minor vel major
cono $efghm$. Pri-

imum sit n minor, cono $efghm$, magnitudine o ;
adhibitaq; præcedentis constructione, erit rursus
pyramis $epfqgrhsm$, major quam n . Iam du-
cantur kb , kt , mf , mp , ut fiant triangula
 bkt , fmp ; connectanturq; ti , pl . Quoniam
igitur Coni $abcdk$, $efghm$ ponuntur similes;
erit, ut diameter bd , ad diametrum fh : β vel, α 24. defin.
ut semidiameter bi ad semidiametrum fl , ita a XI.
 $xisik$, ad axem ml . Cumq; anguli bik , flm β 15. V.
sint γ recti, quod & con i ponantur recti; & ipsorum γ 3. def. XI.
axes ad bases recti: δ erunt triangula bik , flm δ 6. VI.
equiangula: adeoq; ut kb ad bi , ita mf ad fl . δ 4. I.
Sed ut bi ad bt , ita fl ad fb , ob similitudinem δ 7. V.
triangulorum bit , flp . (quia anguli bit , flp ,
similibus arcibus insistentes sunt æquales, cir-
cumq; ipsos latera proportionalia)

Itaq;

Itaq³ ex æquo, ut kb ad pt , ita mf ad fp . Rur-
sus, quia latera ki , ib , trianguli kib , equalia
sunt lateribus ki , it , trianguli kit , & anguli
ipsi, comprehensi recti γ . Erunt bases kb , kt , æ-
quales. ζ . Eodemq³ modo æquales erunt rectæ mf ,
 mp , atq³ sic rectæ kb , kt , rectis mf , mp pro-
portionales: Quia verò, ut kb , ad bt ; ita kt , ad
eandem bt : item, ut mf ad fp , ita mp , ad ean-
dem fp . Erat autem ut kb ad bt ; ita mf ad fr ;
erit quoq³ ut kt , ad bt , ita mp ad fb : & con-
vertendo, ut bt ad kt , ita fp ad pm . Quare cum
sit ut tk ad kb , ita pm ad fm ; Et ut kb ad bt ;
ita mf ad fp . Et, ut bt ad kt , ita fp ad pm ;
habebunt triangula bkt , fmp , latera propor-
tionalia: Eruntq³ & equiangula & similia. Neq³
aliter reliqua triangula pyramides atb . ucx dyk ,
& epf $qgrhsm$, ambientia inter se similia ostē-
dentur. Cumq³ multitudine sint equalia, erunt
dictæ pyramides & similes & in \times triplicata propor-
tione homologorum laterum. Vt autem bt ad fp ,
ita est bi ad fl , ob similitudinem triangulorū bit ,
 flp : β Et ut bi ad fl , ita bd ad fh . Igitur py-
ramis a ad pyramidem habebit quoq³ proportionem
triplicatam diametrorum bd , fh . Sed earundem
diametrorum proportionem triplicatā habebat Co-
nus $abcdk$ ad n : Erit igitur, ut pyramis $atbu$
 $cxdyk$ ad pyramidem $epfqgrhsm$; ita
conus $abcdk$ ad n . Cum igitur pyramis prior sit
minor

θ 9. def. XI.
e 8. XII.

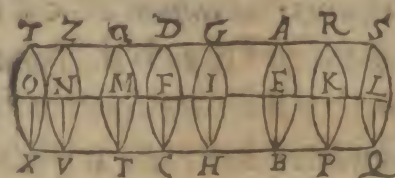
minor Cono $abcdk$, pars toto: erit etiam posterior minor magnitudine n , qua tamen modo ostensa est major. Quod absurdum. Non ergo minor est magnitudo n , Cono $efghm$. Iam sit n major cono $efghm$. Cum ergo Conus $abcdk$ habeat proportionem triplicatam diametri bd ad diametrum fh ; Sicut & pyramis $atbucxdyk$ ad pyramidem $epfqgrhs m$: erit, ut conus $abcdk$ ad n , ita pyramis ad pyramidem. & convertendo, ut n ad conum $abcdk$, ita pyramis $epfqgrhs m$ ad pyramidem $atbucxdyk$. Quare cum pyramides illæ habeant rationem triplicatam homologorum laterum pf ad tb ; id est, diametri fh , ad db , habebit etiam n ad conum $abcdk$ rationem triplicatam diametri fh ad bd . Ponatur ergo ut n ad conum $abcdk$: ita conus $efghm$, ad o . Erit etiam inter hæc ratio triplicata diametrorum fh ad bd . Cum autem n ponatur major cono $efghm$: λ erit & conus $abcdk$ major quam o . Itaq; conus $efghm$ ad o minor λ 14. V. norem cono $abcdk$, proportionem habet triplicatam diametrorum fh ad bd . Quod absurdum: quia ostensum est modo non posse Conum ad magnitudinem alio cono minorem; proportionem habere triplicatam diametrorum baseos. Itaq; nec major est n , quam conus $efghm$ sed sunt æquales. Ideoq; conus $abcdk$, ad n & μ conum $efghm$, μ 7. V. habet rationem triplicatam diametrorum fh ad bd . Et

b d. Et quia eorundem conorum cylindri sunt tripli, & habebunt ipsi quoque eandem rationem triplicatam diametrorum basium fh ad b d.

PROPOSITIO XIII.

Theorema 13.

Si Cylindrus $abcd$, plano gh , secetur, adversis planis ab, cd , parallelo: Erit ut cylindrus, $abhg$, ad cylindrū, $ghcd$; ita axis, ci , ad axem if .



Intelligatur enim Cylindrus $abcd$ utringque protractus, una cum axe & rectangulo eg , ex cu-

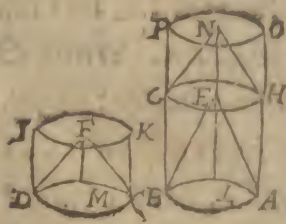
jus revolutione est genitus. Sumanturque in axe producto rectae ek, kl , aequales ipsi el : & aliae fm, mn, no , aequales ipsi if , & per puncta a, i, k, l, m, n, o , ducantur rectae ih, kp, lq, mt, nu, ox aequales & parallelae ipsis eb, fc ; quae ad revolutionem rectanguli describent circulos gh, pr, qs, ta, uz, xy , parallelos & aequales circulis ab, cd : erunt ergo $sp, pa, ah, hd, dt, tz, zx$. cylindri, ex definitione, componentis cylindrum totum $squxy$. Quoniam vero tam cylindri sp, pa, ah , super aequales bases qs, pr, ba . & sub aequalibus

æqualibus altitudinibus, kl, ek, ie , sunt æquales;
 quàm cylindri xz, zt, td, dh , sub æquales bases
 xy, uz, ta, cd , & sub altitudinibus æqualibus æ 11. XII.
 no, mn, fm, if . Erit tam multiplex cylin- p 7. def. V.
 drus xg cylindri $c g$, quàm multiplex est a-
 xis io , ipsius if : Et tam multiplex cylin-
 drus sh cylindri ah , quàm multiplex axis il ipsi-
 us ie . Si ergò axes il & io sunt æquales æ: æ-
 quales etiam sunt cylindri sh & xg ; si verò axis
 axe est major, etiam cylindrus cylindro major est;
 & si minor, minor, in quacunq; multiplicatione. E-
 rit igitur axis ie , ad axem if , ut cylindrus ah , ad
 cylindrum gh .

PROPOSITIO XIV.

Theorema 14.

Super æqualibus basibus ab, cd , e-
 xistentes, coni abc, cdf , & cylindri
 $abgh, cdik$, inter se sunt ut altitudi-
 nes le, mf .



Extenso cylindro $abgh$,
 ad partes gh , unà cum
 axe le , & rectangulo
 ag ; abscindatur axi mf ,
 æqualis en , ut n sit
 centrum circuli, æqua-
 lis & paralleli ipsi gh :
 &

11. XII. & fiat cylindrus $ghop$ ejusdem altitudinis cum
 7. V. cylindro $cdik$, qui & in cr se sunt æquales a : ad
 13. XII. quos cylindrus ag habet eandem rationem. Est
 10. XII. & autem cylindrus ag ad cylindrum ap , ut axis
 15. V. vel altitudo le , ad axem vel altitudinem en , id
 est, ad mf huic æqualem. Igitur & cylindri ag ,
 ci sunt ut altitudines le , mf . Cumq; coni abc ,
 cd sint partes d' tertiæ cylindrorum, erunt et-
 iam coni hi , ut altitudines le ad mf .

PROPOS: XV.

Theorema 15.

Æqualium conorum abc , def , &
 cylindrorum $abgh$, $deik$, recipro-
 cantur bases ab , de , & altitudines lc ,
 mf : & quorum conorum & cylin-
 drorum reciprocantur bases & alti-
 tudines illi sunt æquales.

11. XII.



In cylindris enim si al-
 titudines lc , mf sint
 æquales a , erunt &
 bases æquales: Eritq;
 ut bases ab ad de , i-
 ta altitudines æquales mf ad lc , id est, bases e-
 runt altitudinibus reciproca. Si verò altitudines

lc, mf , sint inaequales; abscindatur ex m f , mn ,
 aequalis ipsi lc , & centro n describatur planum i-
 psi basi de aequale & parallelum, ut fiant duo cy-
 lindri do, ok . Quoniam ergo aequales ponuntur
 cylindri ag, di , & habebunt ad eundem cylindrum β 7 V.
 do , eandem rationem. Sunt autem cylindri γ 14. XI.
 ag, do , ut bases ab, de , propter aequales altitu-
 dines; & cylindri di, do , ut altitudines mf &
 mn propter identitatem γ basis & cylindri. Erit
 ergo ut bases ab ad de ; ita altitudines mf ad
 mn , vel huic aequali lc , id est, bases & altitu-
 dines sunt reciprocae. In conis, si ponantur aequales,
 abc, def ; erunt & eorum cylindri ah, di , quo- δ 10. XII.
 rum sunt partes δ tertiae, aequales. Et quia horum
 bases & altitudines reciprocantur. Ergo & cono-
 rum. Si vero ponantur bases & altitudines reci-
 procae, etiam conus & cylindri erunt aequales. In cy-
 lindris ergo ag, di , si altitudines ic, mf sint a-
 quales, cum bases ab, de sint, ut altitudines: e-
 runt & ipsae & toti cylindri aequales. si vero altitudi-
 nes sint inaequales, cum ponantur altitudines mf ad
 lc , id est, mn ut bases ad ad de : * Sinq, bases
 ab ad de ut cylindri ag ad do , propter altitudi-
 nes aequales, & ut altitudines mf , ad mn , ita
 cylindri di ad do propter identitatem basis de .
 Erunt cylindri ag, di in eadem ratione, ad cylin- δ 9. V.
 drum do , & sic: aequales. In conis vero reciprocis po-
 sitis basibus, & altitudinibus; ipsorum quoque tri-

ribus $b c$ quadrantis, & $a h c$ semicirculus in aqua-
 les semicirculi $a b c$ partibus, quibus arcubus sub-
 tensa lineæ omnes erunt & æquales rectæ $c k$: & sic
 polygonum æquilaterum erit perfectum, quod mi-
 norem circulum $d e$ non tangit. Denissâ per-
 pendiculari $k l$ per k in $a c$, quàm secat in m . Quo-
 niam anguli $g e m$, $k m e$ sunt recti: $d e$ erunt $g h$,
 $k l$, parallelelæ. Quare cum $g h$ tangat circulum
 $g e$ in e erit $k l$ tota extra illum circulum, cumq;
 nunquam attinget, quia nunquam cum recta $g h$
 convenire potest. Ideoq; multò minus k longius ab
 eodem circulo remota tanget illum circulum. Pro-
 inde nec reliquorum polygoni laterum ullum huic
 $c k$ æquâlium, æqualiter quippe à centro f distan-
 tium, circulum $d e$ continget.

29. III.

28. I.

14. III.

PROPOS. XVII.

Problema. 2.

Duabus sphaeris $a b c d$, $e f g h$, circa
 idem centrum i existentibus, in ma-
 jori sphaera $a b c d$, solidum polyedrū
 inscribere, quod non tangat mino-
 res $e f g h$, sphaeræ superficiem.

Ambæ sphaeræ secantur plano aliquo per centrum,
 sintq; cōmunes sectiones factæ in sphaeris plana $a b$
 $c d$, $e f g h$, quæ circuli sunt ex definitione sphaeræ,
 idem habentes centrum i cum ipsis sphaeris.
 In his circulis ducantur diametri $a c$, & $b d$
 in centro i ad angulos rectos se secantes,

B I

B I

erit etiam ck subtensa minor recta ae , id est, gr .
 Et ck erit inscribendi polygoni latus. Nam cum
 recta cd arcum subtendens minorem arcu $c\gamma$, non
 tangat circulum $efgh$; multò minus ck arcum
 cd minorem subtendens eundem circulum tanget.
 Rursus ducta diametro kn , erigatur ex centro i
 perpendicularis io , ad plana circulorum $abcd$,
 $efgh$, occurrens superfici ei sphaerae maioris in o , et
 per rectas oi , ac , et oi , kn ducantur plana, quae
 ad circulum $abcd$ erunt recta, efficiensq; com-
 munes sectiones circulos, quorum semicirculi sunt aoc , nok . Quia verò anguli oic , oik sunt
 recti; et erunt oc , ok quadrantes, et quidem,
 quia aoc , nok , circuli aequales sunt ipsi $abcd$,
 propter aequales diametros: erunt ipsi cd , oc , ok ,
 aequales quadrantes. Si ergò dl arcus dividatur
 in tot partes, in quot divisus est cl ; et quadran-
 tes oc , ok in partes numero et magnitudine ae-
 quales arcibus quadrantis cd : erunt illis omnibus
 subtense rectae ck , kl , lm , md ; cp , pq , qr ,
 ro , rs , st , tu , uo aequales. Cōiunctis autē rectis ps
 qt , ru , demittantur ex p et s ad planum circuli
 $abcd$ perpendiculares px , sy , quae in communes
 sectiones ac , nk , cadent, eruntq; inter se pa-
 rallelae. Quoniam ergò triangulorum pcx , sky anguli x et y sunt γ recti, anguliq; pcx , sky
 et aequales, quod peripheriae aop , nos ; quibus in-
 scribunt, aequales sint. Erunt ergò propter illos an-
 gulos

Ll 3

gulos



53. I.
2. VI.

φ 9. XI.
 2 7. XI.

gulos aequales & latera $p c, s k$ aequalia. etiam re-
 l. $p a$ latera reliquis aequalia. Cum itaq, aequales
 sint $p x, s y$ & parallelæ erunt τ & ipsas conne-
 ctentes $p s, x y$, aequales & parallelæ. ν Sed quia
 etiam $c k, x y$, sunt parallelæ, propter latera $i c,$
 $i k$; proportionaliter secta erunt ϕ & $p s, c k$ pa-
 rallelæ, & has connectentes $c p, k s$ in eodem cum
 ipsis plano erunt x & totum quadrilaterum $c k$
 $s p$ in uno plano erit. Si ex q & t demittantur
 perpendiculares in planum $a b c d$, connectanturq,
 rectæ $q c, t k$, quas similiter parallelis, ipsaq, $p s,$
 $q t$, tanquam eidem $c k$ parallelas, inter se pa-
 rallelas, totumq, quadrilaterum $p s t q$ in uno
 plano esse ostenderemus; sicut & quadrilaterum
 q t u r

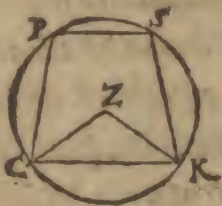
qtur & triangulum ψ ruo. Quae ipsa constru-
 ctio si & super reliqua latera kl, lm, md , dictis $\psi 2. XI.$
 videlicet quadrantibus, ol, om, od exhibeatur.
 nec non & in reliquis quadrantibus & reliquo hae-
 misphærio, ut tota sphaera major quadrilateris &
 triangulis repleatur similibus & equalibus modo
 praedictis super latus ck inter quadrantes oc, ok
 constructis, inscriptum erit in majori sphaera solidum
 polyedrum circumscriptum dictis quadrilateris atq;
 triangulis. Dico hoc sphaerā minorem $efgh$ non tan-
 gere, ducatur $i\gamma$. Quoniam igitur ex constructione
 ck est minor recta $c\gamma$: est enim ck major, quam $\omega 19. I.$
 $c\gamma$ quod angulus czk est obtusus, multo major erit ω per schol.
 quā cz & quadratū rectae $g\gamma$ majus quadrato zc . sequens.
 Quoniam verò quadratū $i\gamma$ æquale est quadratis
 rectarum $ig, g\gamma$, & quadratum ic , quadratis iz
 zc : sunt autem aequalia quadrata $i\gamma, ic$, equalia $\beta 47. I.$
 ergo sunt etiam $ig, \gamma g$, ipsis iz, zc : demptōq; il-
 linc quadrato $g\gamma$, & hinc quadrato zc , relinque-
 tur quadratum ig minus quadrato iz ; rectaq;
 ig minor recta iz . Quocirca cum ig sit sphaerae
 minoris $efgh$ semidiameter, existet punctum z ,
 extra eandem sphaeram, ipsumq; planum $cksp$,
 sphaeram $efgh$ minime tanget quod & reliqua o-
 mnia ipsius pūcta longius absint à sphaera illa quā z .
 Ducatur rursus ex i ad planum $pstq$, perpen-
 dicularis $i\beta$; erit β centrum circuli circa $pstq$,
 descripti, conplexusq; $\beta p, ip$, cum angulus $i\beta p$ sit
 γ rectus. Erit quadratū ip æquale quadratis $i\beta, \beta p$.

Ll

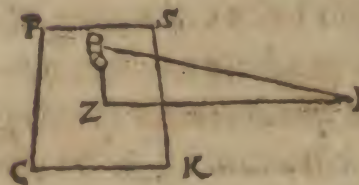
Quia

Quia verò & quadratum ic æquale quadrato ip æquale est quadrato iz, zc : Est autem quadratum zc majus quadrato op , quod & linea zc major sit, quam linea op . Reliquum ergo quadratum rectæ ib majus est quàm iz : adeoque multo magis punctum z extra spheram $efgh$, existet, quàm z : multoque minus planum $pstq$ quàm $cksp$, tanget spheram $efgh$. Eodemque modo demonstratur, nullum reliquorum planorum attingere posse spheram $efgh$. Quod erat faciendum.

S. holium.



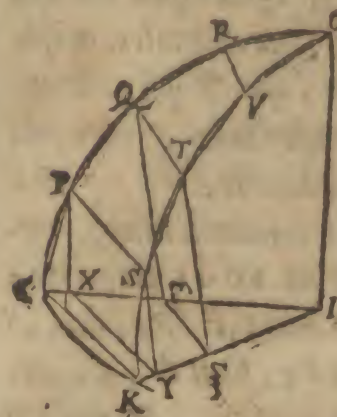
In quadrilatero $cksp$ ponebatur angulus czk obtusus, quod ita probatur: Circumscripto circulo circa illud, quadrilaterum, cum sit, ut ik ad kc , ita iy ad yx : yk autem β major sit quàm iy ; major etiam erit kc , quàm yx , id est, quàm



4. VI,
14. V,
28. III,
13. III.

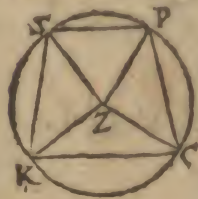
sp . Quare cum equalibus arcibus subtensa sk . pc ipsi kc sint æquales, & erunt arcus illi singuli majores quadrante, ipseque angulus czk obtusus. Deinde etiam sumptum est, omnia alia puncta quadrilateri $cksp$ longius abesse, quàm z , quod patet. Punctum enim quodcumque β connectatur cum i , quo-

quoniam $i z$ est rectus. \therefore Erit ipsi oppositum latus $i o$ majus latere $i z$, & sic remotius $i z$. 3. def. XI.
§ 19. l.



Deniq, probabitur, quomodo recta $z c$ major sit recta βp ; si tamen prius fuerit ostensum, $p s$ esse majorem recta $q r$. Opus autem est nobis huius figurae superioris parte intra semidiametros $i c$, $i o$ contenta, & quadrantibus $o c$, $o k$, demissioneq, per. 38. XI.

pendicularium $e \mu$, & $\tau \xi$ quae ad communes circulo- p 6. XI.
rum sectiones $i c$, $i k$ cadunt, ac parallelae sunt,
quas aequalis & parallela $q r$ & $\mu \xi$ connectunt. x 2. VI.
Qua $\mu \xi$ cum τ sit parallela ipsi $c k$, quia $i c$ & $i k$ 30. I.
latera similiter per $\mu \xi$ sunt secta, etiam parallela μ cor, τ VL
erit $x y$. Erit itaq, ut $i y$ ad $y x$, ita $i \xi$ ad $\xi \mu$, VL
& sit $y x$ vel $s p$, minor quam $\xi \mu$ vel $q r$.



Hoc ostenso ex centrīs z, β , circa quadrilatera $c k s p$, $p s t q$ describantur circuli cum semidiametris. Si $z c$

nō credatur major quā βp , erit vel aequalis, vel minor. Si aequalis, cum lateribus $c k$, $z c$ ponantur aequalia latera βs , βp , & basis $k c$ major quā $s p$; erit angulus $k z c$ major angulo $s \beta p$. Eo- 25. l.

L. l. s

demq,

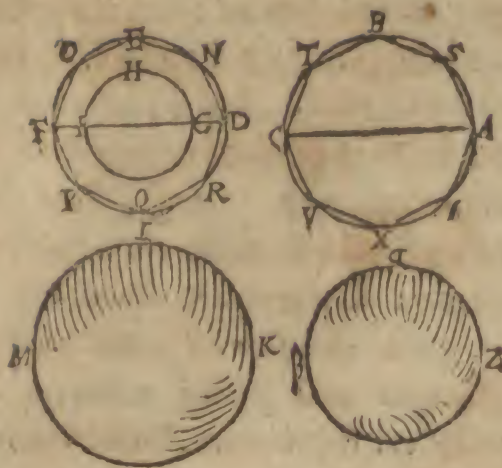
§. 12. I. demq³, modo szp . major est angulo βq . Sed pro-
 pter bases sk, pc, ts, qp aequales, & aequales sunt.
 cor. 15. I. anguli $kz s, czp, spt, p\beta q$. Igitur quatuor an-
 guli ad z , qui quatuor rectis sunt. aequales, mayo-
 res sunt angulis quatuor ad β , qui & ipsi quatuor
 rectis. aequales sunt. Quod absurdum. Si vero mi-
 nor sit zc quàm βp , abscindantur $\beta\pi, \epsilon\epsilon, \beta\omega$
 $\beta\phi$ aequales ipsis zc, zk, zs, zp , connectanturq³ pun-
 cta $\pi, \epsilon, \omega, \phi$ lineis quadrilateri $spq\tau$ lateribus
 parallelis. Erit itaq³ ut βs ad sp , ita $\beta\epsilon$, ad $\pi\omega$
 $\epsilon\pi$ nimirum π minor quàm $\beta\epsilon$, sicut & $\epsilon\omega, \omega\phi$
 $\phi\pi$ minores sunt quàm st, tq, qp . At cum sp
 sit minor, quàm ck ; & st, pq , aequales rectis ks ,
 cp ; tq & minor, quàm ps : erunt rectae $\pi, \pi\omega$,
 $\omega\phi, \phi\epsilon$ minores rectis ck, ks, sp, pc ; sed propter
 $\beta\pi, \beta\omega, \beta\epsilon, \beta\phi$ aequales positas ipsis zc, zk, zs, zp ,
 anguli ad z , majores angulis ad β , quibus tamē
 aequales sunt. Itaq³ nec β ipsa zc minor erit; &
 quia nec aequales sunt. Proinde zc major erit quàm
 βp . Quod erat propositum.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema 16.

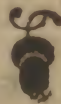
Sphaerae sunt abc, def in tripli-
 cata ratione suarum diametrorum.
 ac, df .

Si minus, erit sphaera abc ratio eadē, ad aliam vel
 majorem



majorē vel minorem spheram. Primum ergo habeat
 rationē triplicatā a c ad d f, sphaera a b c, ad sphæ-
 ram g h i minorem sphaerā d e f. Inscibatur autē 17. XII.
 in majori sphaera d e f polyedrum d n e o f p q r,
 non tangens minorem g h i, atq; huic simile a b c,
 sphaera a s b t c u x y; quæ cū sint in triplicata ra-
 tione a c ad d f; sunt sphaera a b c, g h i: erit, 17. XII.
 ut a b c, ad g h i, ita polyedrum ad polyedrum. Itaq;
 cum sphaera a b c sit major polyedro sibi inscripto,
 & erit & g h i sphaera major altero polyedro, d n e
 o f p q r, pars tota. Quod absurdum, non ergo major 14. V.
 sphaera a b c, ad minorem g h i, ipsa d e f ha-
 bet rationem triplicatam diametrorum a c ad d
 f. Habeat porro rationem hanc ad quandam mayo-
 jorem k l m, ipsa d e f. Rursus est, ut polyedrum,
 a s b t c u x y ad polyedrum d n e o f p q r, si d
 est, ut a c ad d f, ita sphaera a b c ad sphaerā k l m:

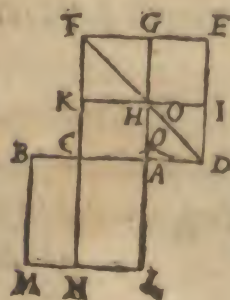
Et convertendo, ut klm ad abc , ita polyedrum
 posterius ad prius, id est, pdf ad ac . Ponatur
 autem ut klm ad abc , sic def ad $z\alpha\beta$. Quia
 ergo sphaera klm major ponitur ipsa def . Erit
 abc major ipsa $z\alpha\beta$. Itaque sphaera def ad
 sphaeram $z\alpha\beta$, ipsa abc minorem, habet ratio-
 nem triplicatam diametrorum df ad ac . Quod
 absurdum, quia ostensum est, non posse sphæ-
 ram ad sphaeram aliam sphaeram minorem, pro-
 portionem habere triplicatam diametrorum. Cum
 ergo sphaera abc , neq; ad minorem neq; ad ma-
 iorem sphaeram, ipsa def , habeat rationem tri-
 plicatam diametrorum ac ad df : habet itaq; ad
 ipsam def . Et sic sphaera quævis ad quamvis tri-
 plicatam diametrorum rationem habet. Hinc
 fit: sphæras esse inter se, ut in ipsis similia
 polyedra descripta propter proportionem
 eandem triplicatam diame-
 trorum.



ELE-

PROPOSITIO. I.

ms. II. vel
30. VL



Super cd fiat quadratum ce ,
in quo ducta diametro df , du-
catur a g ipsi de parallela, se-
cans diametrum in h puncto per
quod ducatur ik parallela ipsi cd .
Deinde super ab perficiatur qua-
drat.

β cor. 4. II. $\text{dratum } a m \text{ retrahatur } g_3 f c \text{ ad } n. \beta$ Erunt $a i$,
 γ_3 det VI. $k g$ quadrata rectarum $a d, a c. \gamma$ Quia ergo est.
 δ 17. V I. ut $a b$ ad $a c$, ita $a c$ ad $c b$: δ erit re-
 ctangulum $c m$ sub extremis aequale ipsi $k g$ qua-
 drato mediae $a c$. Cum $g_3 a b$, id est, $a l$ ponatur du-
 pla ipsius $a d$, id est, $a h$; & sit, ut $a l$ ad $a h$, ita
 11. VI. rectangulum $a n$ ad $a k$: erit $a n$, ipsius
 $a k$ duplum. Quia vero $a k$ & $i g$ sunt γ equalia,
 § 43. I. erit $a n$ aequale duobus $a k, i g$. Ideo g_3 additis a -
 qualibus, $c m$, $k g$ erit quadratum $a m$, aequale
 gnomoni $o p q$. Quare cum quadratum $a m$ sit
 quadruplum $a i$, quia $a b$ est dupla ipsius $a d$: Erit
 etiam gnomon $o p q$, quadruplus ejusdem quadra-
 ti: addito g_3 quadrato $a i$, erit quadratum $d f$ quin-
 tuplum quadrati.

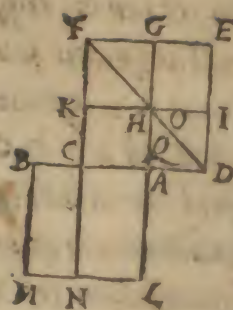
PROPOSITIO II.

Theorema 2.

Si recta linea $d c$ sui ipsius segmen-
 ti $d a$ quintuplū possit; duplæ $a b$ præ-
 dicti $d a$, segmenti extrema & media
 ratione sectæ in c ; majus segmentum
 $a c$ reliqua pars est ejus, quæ à prin-
 cipio, rectæ.

Super $d c$ fiat quadratum $d f$. & diametrum
 $d f$ secet $a g$ parallela ipsi $c f$ in h , per quod ducatur
 $i k$ parallela ipsi $d c$, producta $g_3 a c$ fiat super
 $a b$ du-

LIBER XIII.



ab dupla ipsius da quadratum
 am , & continuetur cf in n . E-
runt α ergo ai, kg quadrata re- = cor. 4. II.
ctarum da, ac . Quia autem

quintuplum ponitur quadratum
 ce quadrati ai ; relinquitur
gnomon opq quadruplus ejus-
dem quadrati ai . Sed & am

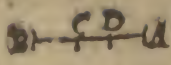
quadratum est quadruplum ejusdem quadrati ai .
Quia ab est dupla ipsius da . Sunt igitur gnomon
 opq & quadratum am equalia. Rursus, quoni-
am ab , id est, al , ponitur ipsius da , id est, ah , du-
pla; & β est, ut la ad ah ; ita rectangula lc ad a 1. VI.
 k . Erit quoque illud hujus duplum, & sic equalibus
 ak, he , rectangulis simul equale lc , & reliquum
rectangulum cm reliquo quadrato kg . Cumque sint
tres recte ab, ac, cb ; & rectangulum cm sub ab, c 43. I.
 b sit equale quadrato recte ac & erit, ut ab ad
 ac , ita ac ad cb . Secta itaque est ab extrema & d 17. VI.
media ratione in c , estque majus segmentum ac .

PROPOS: III.

Theorema 3.

Si recta linea ab , secundum medi-
am & extremam rationem secetur in
 c ; minus segmentum cb assumens dimi-
diā cd majoris segmenti ac , quintu-
plū potest ejus, quod a dimidia ma-
joris segmenti describitur quadrati.

Quoni-


 Quoniam $a c$ est bisecta in d , eiq;
 addita $c b$; erit a rectangulum sub
 6. II. $a b, b c$; una cum quadrato recte $c d$, aequale
 quadrato recte $b d$. Sed rectangulum sub $a b, b c$
 est quadruplum quadrati $c d$, quia intermedia
 quadratum $a c$, huic aequale, est quadruplum qua-
 drati ejusdem $c d$. Idem ergo rectangulum sub a
 $b: b c$ una cum quadrato $c d$, est quintuplum
 quadrati $c d$. Ideoq; & quadratum recte $b d$,
 segmenti minoris cum dimidio majoris quintuplum
 est ejusdem $c d$ quadrati.

PROPOS: IV.

Theorema 4.

Si recta linea $a b$, secundum me-
 diam & extremam rationem sece-
 tur in c : quod a tota $a b$, quodq; a mi-
 nore segmento $c b$ simul, utraq; qua-
 drata $a b, c b$ tripla sunt ejus quod a
 majore segmento $a c$ describitur qua-
 drati.

17. VI.
 7. II.



Quia enim rectangulum sub
 $a b, b c$ aequale est quadra-
 to $a c$; & illud rectangulum
 bis, cum quadrato $a c$, triplu
 est quadrati $a c$; erunt & his a equalia quadrata
 $a b, b c$ tripla ejusdem quadrati $a c$.

PRO.

LIBER XIII.
PROPOS: V.

555

Theorema 5.

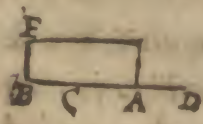
Si recta linea ab , secundum mediā
& extremam rationem secetur in c ;
apponaturq; ei da æqualis majori $a c$
segmento: tota recta linea bd secun-
dum mediā & extremam rationē
secatur, & majus segmentum est, quæ
à principio recta linea $a b$.

Quia enim est, ut ab
ad ac , vel $a d$, ita $a c$ ad $c b$:
etiam convertendo est, ut da
ad $a b$, ita $b c$ ad $c a$. &
componendo, ut db , ad $a b$, ita $a b$, ad $c a$, vel ad
 $d a$. Secta itaq; est bd in a , extrema & media
ratione.

PROPOS: VI.

Theorema 6.

Si recta linea ab Rationalis extre-
mā ac mediā ratione secetur in c , u-
trumq; segmentorū $a c$, $c b$ irrationalis
linea est, quæ vocatur Apotome.



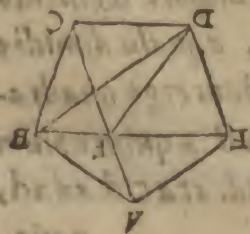
Addatur majori segmento
 $a c$, recta $a d$, æqualis dimidiæ
totius ab . Quoniam ergò quadra-
tum rectæ $c d$, est æ quintuplum $a c$. XIII.
quadrati rectæ $a d$, habebunt quadrata $c d$ ad ad ,
M m ratio-

- 6. X. rationem, quam numerus ad numerum. & eruntq³ inter se commensurabiles: ipsaq³ recte c d. ad commensurabiles saltem potentia. Sed a d dimidia Rationalis a b, est Rationalis. Ergo & c d.
- 72. VIII. Quia verò quadratum c d, a d non habent rationem, quam numerus quadratus, ad quadratum, cum sit quinarius ad unitatem; & erunt c d, a d recte longitudine incommensurabiles, ac proinde rationales potentia solum commensurabiles. Quare,
- 74. X. si ex Rationali c d detrahatur a d rationalis potentia solum commensurabilis; erit reliqua c Irrationalis, quæ vocatur Apotome. Rursus, applicato ad a b rectangulo a e, contento sub a b, c b: cum sit, ut a b a l a c; Sic a c ad c b: erit hoc rectangulum a e æquale quadrato recte, a c. Quare quadratum Apotome a c, i. e. rectang. a e applicatum ad a b Rationalis, facit alterum latus b e, vel huic æquale segmentum minus c b Apotomen primam.

PROPOS: VII.

Theorema 7.

Si pentagoni a b c d e æquilateri, tres anguli a b c sive qui deinceps, sive qui non deinceps sint, æquales fuerint: æquiangulum erit ipsum pentagonum.



Primò sint tres anguli a b, c deinceps. Angulis dictis æqualibus subtendatur recte b e, a c, b d; atq³ ex intersectione illarum ducatur

Ducatur recta fd . Iam in triangulis abc & cbd ,
 equalium laterum, ex hypothesi ab, ac ipsis bc ,
 cd : & anguli contenti a ipsis c : erunt &
 bases be, bd ; & anguli aeb, cdb , 4. I.
 Sed propter be, bd a quales, et iam anguli bed ,
 bde sunt β a quales. Igitur toti aed, cde sunt 5. I.
 a quales: Eodem modo in triangulis abe, abc ,
 sunt a quales bases be, ac : & anguli a be, acb ,
 a quales angulis bac, bca . Itaq; cum anguli
 bac & abe , trianguli bfa , sint a quales: erunt
 & bf, fa a quales: quæ demum ex be, ac , 6. I.
 quolibet, relinquunt a quales fe, fc . Cum er-
 go trianguli fed latera fe, ed sint a qualia tri-
 anguli fed lateribus fc, cd ; & basis fd com- 8. I.
 manis: & erunt & anguli contenti fed, fcd a -
 a quales. Ideoq; aed, bcd , quadrati sunt a qua-
 les. Adeoq; cum ipsi bcd , ponantur a quales bac
 & abc : ipsiq; aed ostensus etiam sit a qualis cde :
 erunt omnes quinque a quales & pentagonum a -
 quilaterum. Deinde tres anguli a, c, d , sint non
 deinceps. Rursus ergo in triangulis bac, bcd ,
 sunt bases be, bd & anguli aeb, cdb , a -
 a quales. Sunt autem & bed & bde β a qua-
 les. Igitur toti aed, cde sunt a quales: & sic
 tres d, e, a , sunt deinceps a quales. Ideoq; ut prius
 Pentagonum a quilaterum.

Mm 2

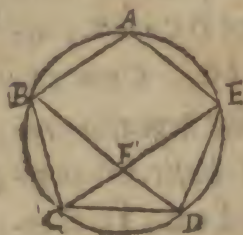
PRO-

EVCLIDIS ELEM.
PROPOSITIO VIII.

Theorema 8.

Si pentagoni $abcde$ æquilateri & æquianguli duos c, d angulos, qui deinceps sint, subtrendant rectæ lineæ db, ce ; hæ mediâ & extrema ratione se mutuò secant, & maiora ipsarum segmenta fb, fe , æqualia sunt pentagoni lateri.

14. IV.
28. III.



Descripto a circulo circa pentagonum. β Erunt quoque arcus ab, bc, cd, de, ea æquales. In triangulis autem cdb , & dce propter æqualia latera bc, cd, de ; & æquales contentos angulos c, d , æquales fiunt bases bc, de , & anguli cdb, edc : quibus cum sit externus bfc , æqualis γ : Erit etiam anguli dce duplus: Sicut & bce , propter duplum arcum bae , ejusdem dce duplus est. Ideoque bfc , & bce ferunt æquales rectæque bf, bc , æquales, id est, latus pentagoni bc æquale est segmento majori bf , subtense bd . Sunt autem & anguli cbd , anguli cdh , æqualibus peripheriis bc, cd insistentes & æquales. Proinde triangula bcd, cfd , propter angulos cdb, cbd æquales, ipsis fdc , & fdc , erunt γ æqui-

32. I.

33. VI.
6. I.

27. III.

40. VI.

angula. Eritque ut bd ad dc , id est, bf : ita dc ,
 dc ,

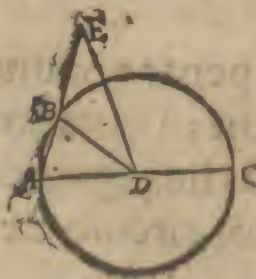
LIBER XIII.

d c, id est, b f, ad f d. Ideoq; b d in f secta est extrema & media ratione. Eodem modo & e c in f eadem ratione secta esse ostenderetur.

PROPOS: IX.

Theorema 9.

Si hexagoni latus b e, & decagoni a b, in eodem circulo a b c descriptorum, componantur: tota recta linea a c extrema ac media ratione secatur, & majus ejus segmentum est hexagoni latus b e.



Ex a per centrum d ducatur diameter a c, & conjungantur rectæ d b, d e. Quoniam igitur ab arcus est decima pars circuli: Semicirculus ac continebit eum quinquies, eritq; b c quadruplus ipsius a b: & angulusq; b d c quadruplus anguli b d a. Rursus in triangulo d b e æ 33. VI. equalium laterum d b, b e; ærunt b d e, & e a æ 5. I. ipsius e: Sicut & d b, a equalis æ b a d. Et sic ambo æ 32. I. simul quadrupli anguli e: adeoq; his æ equalis externus b d c ejusdem e quadruplus. Qui cum & d 42. I. anguli a d b fuerit quadruplus: erunt e & a d b æquales. Et sic propter angulos e & a æquales ipsis b, d a, & a, triangula a e d, & a d b, æquiangula.

M m 3

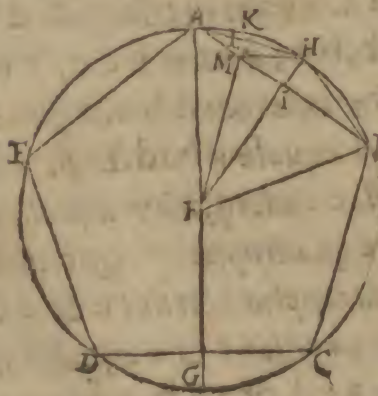
Erit

Erit igitur, ut $a e$ ad $a d$, id est, $e b$; ita $a d$, vel $e b$, ad $a b$. Secta nimirum est $a c$ secundum extremam & mediam rationem, cujus segmentum majus est latus hexagoni. Hinc patet, cum per quintam hujus detractum minus segmentum ex maiore, relinquat majus segmentum, divisum secundum extremam & mediam rationem, quod subtracto latere decagoni ex hexagoni latere fiat decagoni latus segmentum majus lateris hexagoni, media & extrema ratione secti.

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Si in circulo $a b c d e$, pentagonum æquilaterum describatur; Pentagoni latus $a b$ potest & latus hexagoni & latus decagoni in eodem circulo descriptorum.



Ducatur diameter ag
& semidiameter fb ,
& bisecto arcu ab in
 h ; erit ah latus de-
cagoni, & bf hexa-
goni. Rursumq; bi-
secto arcu ah , in k :
Ducatur fk secans
 ah ,

44 VI.

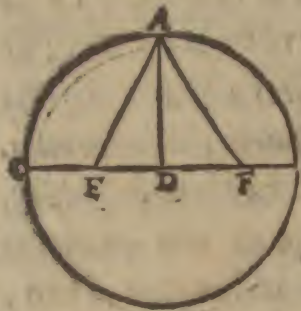
417 VI.

45 I.

42 II.

Quamobrem, ut ab ad ah , ita ah ad hm . Et
 sic sub ab , am , contentum rectangulum aequale
 quadrato ah . Sed sub ab , bm est ostensum æ-
 quale quadrato bf . Itaq; rectangula sub ab , bm ,
 & ab , am æqualia sunt quadratis bf , ah si-
 mul. Sed illa duo rectangula sub ab , bm &
 ab , am sunt æqualia quadrato ab . Aequale ergo
 est quadratum ab , quadratis bf , ah , laterum He-
 xagoni & decagoni. Hinc patet primo, quod linea
 ex centro bisecans arcum, ejus quoq; sub-
 censam bisecet. Secundo quod diameter circu-
 li ex uno angularum pentagoni latus ipsi
 oppositum bifariam secet,

Scholium.



Ex Ptolemæo usitata est
 praxis, qua unâ eademq; o-
 pera in dato circulo & pen-
 tagonum & decagonum
 describantur. Ejus demon-
 stratio hæc est. In circulo
 abc , super diametro bc e-

4. II.

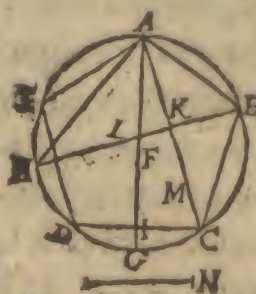
rigatur perpendicularis ex centro, da , & dc bi-
 fariam secta in e ducatur ea ; ipsiq; æqualis abscin-
 datur ef ; & ducatur fa . Erit fa latus pentago-
 ni & fd decagoni. Quia enim dc bisecta est in
 e , ipsiq; adjecta df ; erit rectangulum sub cf , df ,
 unâ, cum quadrato de , æquale quadrato rectæ ef
 vel.

vel ea. Quod aequale est quadrato rectarum ed, da .
 Dempto itaque quadrato communi de : relinquitur B 47. F.
 rectangulum sub cf, df , aequale quadrato rectae ad ,
 id est, quadrato cd . Erunt igitur, ut cf ad cd ; ita V 17. VI.
 cd ad df , & sic cf divisa est secundum extremam
 & mediam rationem in d . Cum igitur illius segmen-
 tum majus cd sit latus δ hexagoni: erit d latus IV. 15.
 decagoni ejusdem circuli. Rursus quoniam qua- III. 9.
 dratum fa aequale est quadrato laterum hexagoni XIII. 10.
 ad , & pentagoni df , erit fa latus pentagoni.

PROPOSITIO XI.

Theorema 11.

Si in circulo $abcde$ Rationalem habente diametrum ag , pentagonum $abcde$, æquilaterum describatur: Pentagoni latus ab latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.



Per centrum f ducantur diame-
 tri ag, bh : quorum ag secet
 cd latus in i : connectanturque
 ac, ah ; Quam ab secet dia-
 metrum bh in k . Abscindatur
 quoque ex semidiametro fh quar-
 ta ipsius pars fl ; itemque ex re-
 ctâ ac quarta ejus pars cm . Quoniam igitur dia-
 meter Mm s meter

ap. 6. X.
cor. 10.
XIII.

ap. 32 I.
ap. 4. VI.

ap. 15. V.
ap. 22. VI.
ap. 8. XIII.
ap. 1. XIII.
ap. 6. X.
ap. 30. VI.

meter b h Rationalis est; erunt & ipsius aliquotae partes b f, f l rationales. Totaq; b l utriq; commensurabilis, & Rationalis. Rursus, qui a f b ex centro secatur arcum a c bisariam in b; ergo & ipsius subtensam ac in k, & ad angulos rectos. Sicut & a g ipsam c d in i. Atq; ita triangula a c i, a f k, rectangula, propter communem angulum a sunt equiangula: & eritq; ut c i ad c a; ita f k ad f a: & permutando, ut c i ad f k; ita c a ad f a. Ut autem c a ad f a, ita est c m, quarta pars ipsius c a ad f l, quartam partem ipsius f a. Erit ergo ut c i ad f k, ita c m ad f l: & permutando ut c i ad c m, id est, harum dupla c d ad c k, ita f k ad f l: & componendo, ut c d c k simul, ad c k, ita f k, f l simul, id est, k l ad f l. Ideoq; erit, ut quadratum rectarum c d, c k simul, ad quadratum c k; ita quadratum k l ad quadratum f l. Quia verò, si a c secetur media & extrema ratione, ducta videlicet recta b d, majus ipsius segmentum n aequale est lateri pentagoni, ut c d: & erit quadratum compositum ex c d segmento majore & c k, dimidia totius, quintuplum quadrati recte c k seu dimidia totius. Quare & quadratum k l quintuplum est quadrati f l. Ideoq; quadrata k l, f l & commensurabilia sunt, & recte k l, f l potentia saltem commensurabiles. Sed f l erat Rationalis. Ergo & k l. Deinde, quia b l continet quatuor partes ipsi f l

aqua-

æquales sit bl talium quinq³ia habebitq³ bl qua-
 dratum talium 25, qualium fl , unam propter ra-
 tionem duplicatam quadratorum ad latera, & kl
 quinq³. Cum igitur quadrata bl , kl , non ha-
 beant rationem numerorum quadratorum: Sunt
 enim ut 25, ad quinque, vel quinque ad unum: μ 9. X.
 & erunt rectæ bl , kl longitudine incommensura-
 biles. Ideoq³ cum & Rationales; erunt Ratio-
 nales potentia solum commensurabiles. Si itaq³
 ex rationali bl , dematur Rationalis kl , poten-
 tia tantum commensurabilis; Erit reliqua k Irra-
 tionalis & Apotome, cujus congruens est kl . Iam
 recta bl possit plus, quam kl , quadrato rectæ n ,
 Quoniam quadratum bl , æquale est quadratis kl
 & n , sed qualium bl sunt 5. talium kl est una:
 Erit n reliqua talium 4; habebunt igitur quadra-
 ta bl & n proportionem numeri ad numerum.
 Ideoq³ erunt commensurabilia, ipseq³ bl & n
 rectæ commensurabiles saltem potentia: Sed bl est
 ostensa Rationalis. Erit igitur & n rationalis.
 Quoniam illa bl ad n ratio, non est numerorum
 quadratorum. Est enim quæ quinque ad quatuor.
 Erunt bl & n longitudine incommensurabiles,
 ac proinde rationales potentia solum commensura-
 biles. Quare cum tota bl rationalis longitudi-
 ne, sit commensurabilis rationali bh : (Qualium
 enim bh est octo, talium bl est quinque)
 possitq³

possit q³ plus quam congruens k l quadrato recta n
 sibi longitudine incommensurabilis, erit b k Apotoma
 quarta ex definitione. Deniq³, quia ab est & me-
 dia proportionalis inter b h, b k; Quia b a h est
 rectangulum o propter angulum rectum a, ex quo
 demissa perpendiculari a k, erit a b, quadratum
 aequale rectangulo sub b h, b k. Cum igitur super-
 ficiem sub Rationali b h, & Apotoma quarta b k,
 possit recta a b & erit a b Minor.

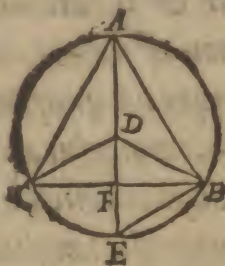
cor. 8. VI
 31. IV.
 27. VI.
 95. X.

PROPOSITIO XII.

Theorema 12.

Si in circulo a b c, triangulum æ-
 quilaterum a b c describatur; triangu-
 lilatus a b potentia triplum est ejus
 lineæ d b, quæ ex centro circuli d du-
 citur.

coroll.
 10. XIII.



cor. 15. IV
 47. I.
 21. III.

Ducta diametro a e; secetur
 & arcus b c in e, & subtenta
 b c in f bisaria, & ad angulos
 rectos: erit b e, dimidia partis
 tertiæ b c, pars sexta circuli, i-
 phiusq³ subtensa b e latus hexa-
 goni, aequale β semi diametro circuli. Quoniam er-
 go quadratum a e γ aequale est quadratis a b, b e,
 quod angulus a b e in semicirculo sit rectus δ. Est
 autem

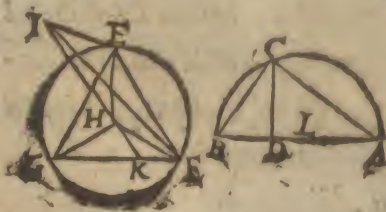
Autem recta ae quadruplum recta be dimidia.
 Qualium itaq; partium quadrata ab , be sunt
 quatuor, talium be est una, & ab tres: adeoq;
 quadratum ab triplum quadrati be , vel semidia-
 metri db . Hinc patet 1. Diametrum circuli
 potentia esse sesquiterciam ad latus trigoni
 æquilateri, quia ipsius partes sunt quatuor, qua-
 lium hujus sunt tres. 2. Semidiametrum de
 bifariam secari in f , à latere trianguli bce .
 Cum enim quadratum ab , sit triplum ipsius be ,
 si ab ponatur partium 12, erit be talium 4. Est
 autem quadratum be æquale quadratis fb , fe ,
 & talium partium tres habet bf , quia quarta
 pars quadrati ab ; Vna igitur illarum est fe ; ipsi-
 usq; quadruplum be , id est, de , ac proinde fe di-
 midia est ipsius de .

Schol.
4. I E.

PROPOS: XIII.

Problema 1.

Pyramidem constituere & datâ
 sphæra complecti, & demonstrare,
 quòd sphæræ diameter potentia sit
 sesquialtera lateris ipsius pyramidis.



In diametro sphæræ
 ad sit dupla ipsius db :
 ducaturq; perpendi-
 cularis cd , & linea
 ca ,

ca, cb . Iungq; intervallo he , id est, dc ductu-
 tur circulus efg , in quo inscribatur triangulum
 equilaterum efg Iunganturq; hf, hg aequales
 ipsi dc , super h erigatur perpendicularis hi , e-
 qualis rectae ad : & ex i demittantur $ie, if,$
 ig . Erit quatuor hisce triangulis comprehensum
 17. VI. solidum pyramis sive Tetraedru. Quoniam enim
 47. I. quadratum ad est duplum quadrati cd ; & qua-
 dratum ca triplum cd eundem cd : Ideoq; etiam
 4. I. ipsarum ie, if, ig equalium γ ipsi ca quadrata
 12. XIII. erunt δ tripla quadratoru he, hf, hg , semidiamet-
 roru. Erunt triangula quatuor efg, efi, fgi, gei ,
 equilatera & equiangulara, ex quibus constituta
 pyramis datae sphaerae, cujus diameter ab est, in-
 scripta. Extensa enim ih , quae aequalis ipsi ad in
 k , dum ik fiat aequalis ipsi ab . Quia inter $ih,$
 hk mediae proportionales sunt he, hf, hg (Sunt
 enim aequales ipsis ad, db, dc) eundem sphaerae
 sub ik , id est, ab diametro semicirculi transibunt
 puncta i, k, e, f, g ; eritq; sphaerae datae diametri ab ,
 inscripta pyramis $efgi$, ad cuius latus quodvis i-
 psius sphaerae diameter est sesquialtera. Cum enim
 8. VI. proportionales sint ab, ac, ad ; & erit, ut ab
 20. VI. ad ad ; ita quadratum ab ad quadratum ac .
 Sed ab est sesquialtera ipsius ac . Igitur & ab , id
 est, ipsius ik diametri sphaerae quadratum erit ses-
 quilaterum quadrati ac , id est, cuiusq; lateris
 pyramidis. Quod erat faciendum.

Corollarium.

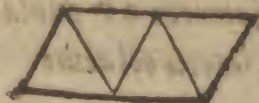
1. Erit

1. Erit etiam diameter sphaerae potentia quadrupla sesquialtera semidiametri circuli circa basin pyramidis descripti.

Quia enim ab est ostensa sesquialtera ipsius ac , id est, ef : Erit quadratum ef : talium partium 6, quod ab novem. Talium autem h e tantum est 2, quia quadratum ef ipsius h e est triplum. Quadratum igitur ab 9 est quadratum ab 2, quadruplum sesquialterum.

2. Perpendicularis ex centro l sphaerae ad planum basis efg pyramidis efg idemissa sexta pars erit diametri ab sphaerae & tertia semidiametri al .

Quia enim ad 4, est dupla ipsius bd 2: erit ipsius ab , 6, ld , 1. pars sexta; & ipsius al pars tertia. Cumque altitudo hi sit ipsa ad , continebit haec duas tertias diametri; & proinde quadratum diametri 9, ad altitudinem 4, exhibet ipsorum proportionem duplicatam ad 3 ad 2. Si ex ma eriant 4, triangula aequilatera quae hunc in modum disponantur, fiet inde pyramis ut docet Durerus.

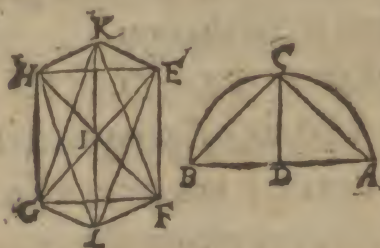


PRO.

EVCLIDIS ELEM:
PROPOSITIO XIV.

Problem 2.

Octaedrum constituere, & sphaera
complecti; quia & pyramidem, &
demonstrare quod sphaerae diameter
potentia sit dupla lateris ipsius octa-
edri.



Circa diametrum ab ,
data sphaera, descripto
semicirculo, erigatur
ex centro perpendicu-
laris dc , & conne-
ctantur ca , cb & a -

4. I.

8. & 4. I.

47. I.

quales. Super ef aequali ipsi ac fiat quadratum $efgh$,
diametris eg , fh , secantibus se in i aequaliter.
Iam ad planum hoc quadratum utring, ex i eri-
gantur perpendiculares ik ; il aequales ipsi ie ,
Iunganturq, puncta k & l cum $efgh$ punctis:
erit ex octo triangulis aequalibus & equilateris $k ef$,
 $k fg$, $k gh$, $k eh$, $l fe$, $l eh$, $l hg$, $l fg$, fa-
ctum solidum octaedrum, quod datae, diametri ab ,
sphaera inscriptum est. Quia super kl , id est, ab , dia-
metro mobilis semicirculus omnia etiam e , f , g , h , tan-
quam aequaliter a centro i distantia puncta tran-
sit, estq, sphaerae diameter ab dupla, ipsius ac , id
est, ef vel cujusq, lateris octaedri.

Corol-

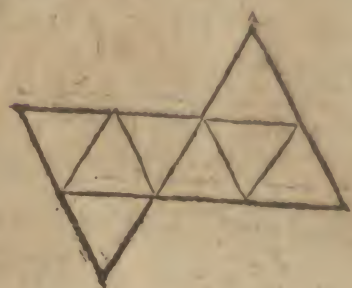
Corollaria.

1. In octaedro tres diametri kl, ef, fh se mutuò ad angulos rectos secant in i centro sphaerae. Quia omnes ad i anguli sunt ostensi recti.

2. Octaedrum dividitur in duas pyramides similes & aequales, quarum basis communis est quadratum $efgh$. Et vertices k, l , altitudinesq; ik, il , semidiametri. Habent enim plana similia & aequalia.

3. Si Tetraedrum & Octaedrum eisdem sphaerae inscribantur Tetraedri latus potentia sesquitertium est lateris octaedri. Quia enim potentia diametri ab est sesquialtera Δ lateris Tetraedri 4, & dupla, Octaedri 3. Erit potentia laterum illorum 4. ad 3. id est, sesquitertia. 13. XIII.
14. XIII.

4. Bases octaedri oppositae sunt parallelae. 16. XI.

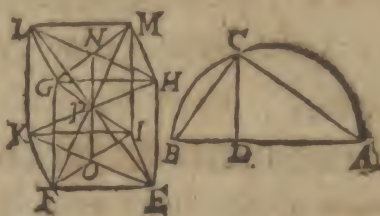


Scholium.
Durerus ex materia vult fieri, si ita inter se complicantur octo triangula.

Nn PRO.

Problema 3.

Cubum constituere, & sphaerā
complecti, qua & priores figuras, &
demonstrare, quòd sphaeræ diameter
potentia sit tripla lateris ipsius cubi.



Circa diametrum datae sphaerae ab descripto
semicirculo auferatur ex ab pars tertia db, &
ex d erigatur perpendicularis dc, junctis ca
cb. Iam super ef aequali ipsi bc, fiat quadratum
efgh, ad cuius angulos 4 erigantur 4 perpen-
diculares rectae ei, fk, gl, hm, aequales ipsi ef,
& extrema connectantur lineis ik, kl, lm, mi,
quae & inter se α sunt aequales & parallelae, quia α -
quales β & parallelae connectunt: & sic quadra-
tum efik: eodemq; modo & fklg, glmh,
hmie: & proinde γ iklm opposito efgh si-
mile & aequale erit quadratum. Itaq; cum el pro-
pter latera opposita δ parallela sit parallelepipedū,
erit etiam cubus, & quidem comprehensus sphaera.
Opposi-

α 43. I.
 β 6. XI.

γ 24. XI.

δ 15. XI.

Oppositorum enim planorum $efki$, $ghlm$ diametri sint ek , fi , gm , hl per quæ ducantur plana ek , lh , fi , mg ; quorum utrumq; cum . secet . 1.5 XI.
 Cubum, transibit & utrumq; per centrum p , in quo & schol. 39.
 etiam omnes cubi diametri se bisariam secant, & XI.
 per idem punctum p communis planorum sectio non
 incedet. Quia vero plana ek , lh , fi , mg sunt
 rectangula, quod & he æquè ad ek , quàm ef ,
 ad e i perpendicularis est; & æqualia propter la- 4. XI.
 tera æqualia. Adeoq; diametri sibi el , fm , hk , 0. 34. I.
 gi æquales; ut & semidiametri pe , pl , ph , pk ,
 pf , pm , pg , pi . Quare ex centro p descriptus
 semicirculus, circa el circumductus, describet sphæ-
 ram omnes Cubi angulos attingentem. Hæc ergo
 el est ipsi ab æqualis. Quia enim quadratum
 ek æquale est quadratis ef , fk , id est, duplum 47. I.
 quadrati ef , vel kl : Erunt quadrata ek , kl
 tripla quadrati kl & sic quadratis ek , kl , æ-
 quale quadratum el etiam est triplum quadrati
 kl , vel bc , cujus quadrati bc etiam triplum
 est quadratum ab . Cum enim ab , bc , bd ,
 sint proportionales; erit, ut ab prima ad bd ter-
 tiam: ita quadratum ab , ad quadratum secun-
 da bc , id est, ab est triplum ipsius bc ; sicut &
 el . Erunt ergo ab , el æqualia. Cumq; qua-
 dratum el fuerit triplum quadrati kl , patet di-
 ametrum sphaerae potentia triplam esse lateris Cubi.

Nn 2

Corolla-

Corollaria.

1. Omnes diametri cubi inter se sunt æquales seq; mutuo bifariam secant in centro sphaeræ; eodemq; modo lineæ centrâ oppositorum quadratorum continentes secantur bifariam in centro.

2. Potentiâ diametri sphaeræ seu cubi, æqualis est potentijs laterum Tetraedri & cubi simul sumptis.

α 13. XIII. *Qualium enim partium quadratum diametri est 9, talium sex est quadratum lateris Tetraedri & taliumq; 3, quadratum lateris cubi.*

Scholium.

Ex materia aliqua in 6 quadrata æqualia in hunc modum divisa optimè fiet cubus seu figura 8 angulorum tessera similis.



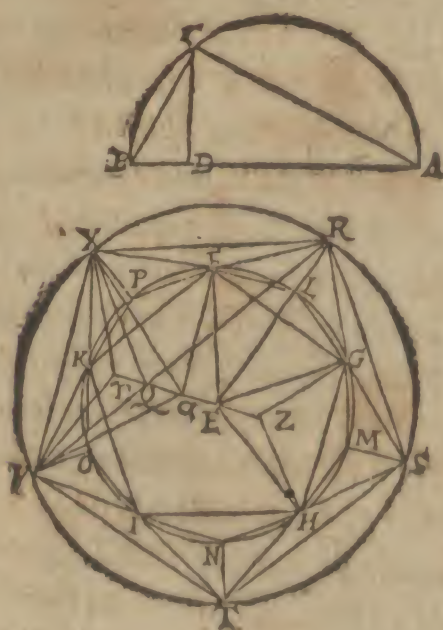
PRO.

LIBER XIII.
PROPOSITIO XVI.

375

Problema 4.

Icosaedrum constituere, & sphaera
complecti, quâ & antedictas figuras;
& demonstrare quod Icosaedri latus
Irrationalis est linea, quæ vocatur
Minor.



Circa diametrum datæ sphaeræ ab descripto se-
micirculo auferatur ex ab pars quinta db , ut ab
ipsius bd sit quintupla: Ipsius ad verò sesquiquar-
ta; & ad ipsius db quadrupla. Ex d erecta per-
pendiculari dc connectantur ca, bc . Intervallo
est, bc describatur circulus cui inscribatur $u. iv.$

Nn 3

penta-

pentagonum equilaterum $fg h i k$, divisumq; arcu-
 bus fg, gh, hi, ik, kf , bisariam in punctis, $l, m,$
 n, o, p connectantur fl, lg, gm, mh , ceu latera
 decagoni. Deinde ex illis punctis ad planum cir-
 culi $fg h i k$ erigantur perpendiculares $eq, lr,$
 $ms, nt, ou; px$, aequales semidiametro ef vel
 bc ; & sic β parallela ipsi eq , quam cum singulis
 opposita binæ aequales & parallela γ connectunt
 semidiametro aequales; ut sic δ plana duo opposita
 parallela $fg h i k$ & $rstux$ contineant quin-
 que semidiametros aequalium parallelorum cir-
 culorum. Connectantur jam puncta $rstux$,
 per lineas rs, st, tu, ux, xr , quæ β parallela sunt
 lineis oppositis ut rx ipsi lp , & γ aequales; aequa-
 lesq; in circulis aequalibus subtendunt arcus: estq;
 rx pars quinta circuli $rstux$ sicut lp pars quinta
 est circuli $fg h i k$. Eodemq; modo reliquæ omnes
 etiam quintas partes eorum circulorum auferunt &
 sic pentagono $fg h i k$ equilaterum æquale est rs
 tux . Ductis $rf, rg, sg, sh, th, ti, ui, uk, xk,$
 xf ; quæ omnes possunt & semidiametros seu
 perpendiculares lr, ms ; & latera decagoni ut $fl,$
 lg . \times Ideoq; sunt æquales lateri pentagoni ejusdem
 circuli, id est, ipsi $fg r x$; & sic decem triangula
 $rfx, rfg, rgs, sgh, sht, thi, tiu, uik, ukx,$
 xkf æquilatera & æqualia sunt. Iam eq perpen-
 dicularis utrinq; extendatur ut qy & ez , sint æ-
 quales lateri decagoni quæ puncta zy connectan-
 tur

tur cum singulis angulorum pentagoni f, g, h, i, k ,
 $\& r, s, t, u, x$; quæ rursus omnes $\&$ possunt semi-
diametros $\&$ latera decagoni illorum circulatorum.
Ideoq; $\&$ æquales sunt lateri pentagoni, ut sic fiât
utring; 5 triangula æquilatera $\&$ æqualia priorib.
10. Hæc ergò 20 triangula, si suis lateribus connectân-
tur, efficiant Icosaedrum. Dico hoc ipsum compre-
hendi sphaera diametri ab . Divisa enim $e q$ in α
ducantur $\alpha f, \alpha x, \alpha u$. Quoniam latera $\alpha q, q u$,
trianguli $\alpha q u$, æqualia sunt lateribus $\alpha q, q x$
trianguli $\alpha q x$, cum $q u, u x$ sint semidiametri
circuli $r s t u x$, $\&$ anguli $\alpha q u, \alpha q x$ recti, $\&$ E-
runt $\&$ bases $\alpha u, \alpha x$ æquales. Ita si ducantur $\alpha 3. \text{ def. XI.}$
 $\alpha r, \alpha s, \alpha t$, æquales ostenderentur ipsis $\alpha u, \alpha x$. $\alpha 4. \text{ I.}$
Rursus, quia trianguli $\alpha q x$ latera $\alpha q, q x$ æqua- $\alpha 9. \text{ XII.}$
lia sunt lateribus $\alpha e, e f$, trianguli $\alpha e f$, quia $e f$
 $\&$ $q x$ æqualium circulatorum sunt semidiametri $\&$
anguli $\alpha q x, \alpha e f$ recti: Erunt bases $\alpha x, \alpha f$,
æquales. Quibus eodem modo æquales ostende-
rentur $\alpha h, \alpha g, \alpha i, \alpha k$. Sunt ergò omnes decem
lineæ, ex α ad decem angulos $f, g, h, i, k; r, s, t, u, x$
ductæ æquales. Quia verò $q c$ est semidiameter
seu latus hexagoni $\&$ $e z$ decagoni: λ erit $q z$ divi-
sain e , secundum extremam $\&$ mediam ratio-
nem, $\&$ minus segmentum $e z$, assumens $e \alpha$ di-
midium majoris, id est, αz , quintuplum μ potest
quadrati $e z$.

Nō

¶

Potest

Potest autem $\&$ e f quintuplum ejusdem quadrati
 e , quia e f dupla ipsius e quadruplum, est qua-
 dratum ipsius e , $\&$ utriusque simul quintuplum e-
 jusdem e . Erunt ergo quadrata e f , a z equalia; i-
 psaeque rectae aequales: $\&$ cum z y secta sit bisariam
 in a , erunt omnes rectae ex a , ad omnes Icosaedri an-
 gulos ductae aequales, $\&$ sphaerae illius diameter erit
 15. V. equalis diametro sphaerae a b . Cum n. sit, ut a z ad
 22. VI. e , ita y z dupla ipsius a z ad q e dupla ipsius a e ; $\&$
 ejusdem rationis erunt, earum quadrata, cumque qua-
 cor. 8. IV. dratum rectae sit quintuplum ipsius e , erit etiam
 quadratum y z quintuplum quadrati rectae q e . id
 est, b c , cui posita est equalis. Sed $\&$ ejusdem qua-
 drati b c quintuplum est quadratum a b , cum
 sit, ut a b ad b c , ita b c ad b d . erit etiam, ut
 a b , ad b d ; ita quadratum a b ad quadratum b c ;
 adeoque quadratum a b , quadrati b c quintuplum
 est, sicut a b ipsius b d est quintupla. Ideoque, qua-
 dratis rectarum y z , a b , equalibus erunt ipsae quo-
 que aequales; $\&$ sphaerae circa ipsas aequales. Quia
 denique diameter sphaerae a b ponitur Rationalis, $\&$
 potest quintuplum quadrati b c vel e f : erit: $\&$ e f
 semidiameter circuli f g h i k Rationalis; cum sint π ,
 per 6. VI ut numerus ad numerum 5 ad 1 $\&$ sic commensura-
 11. XIII. biles saltem potentia: Et tota diameter ejusdem
 circuli Rationalis erit proptereaque, latus pentagoni,
 id est, Icosaedri Irrationalis erit linea vocata Mi-
 nor.

Corol.

Corollaria.

Diameter sphaeræ est potētia quintupla semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis. *Quadratum enim ab quintuplum est ostensum quadrati bc, id est, semidiametri ef.*

2. Diameter yz sphaeræ componitur ex latere eq , hexagoni & duobus lateribus qy , ez decagoni ejusdem circulis $fg h i k$.

3. Latera Icosaedri opposita kx , hi , sunt parallela. *Quia eidem lp sunt parallela.*

Scholium.

Si triangula 20 disponantur hoc modo, componetur Icosaedrum secundum 20, tam soliditatem.



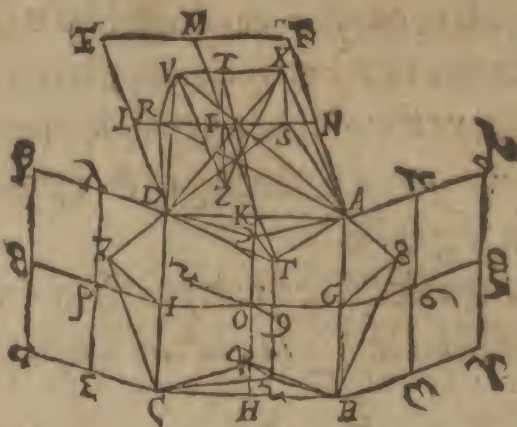
PROPOS: XVII.

Problema 5.

Nn 5

Dode.

Dodecaedrum constituere & sphaera complecti, qua & praedictas figuras: & demonstrare, quod dodecaedri latus est Irrationalis linea, quæ vocatur Apotome.

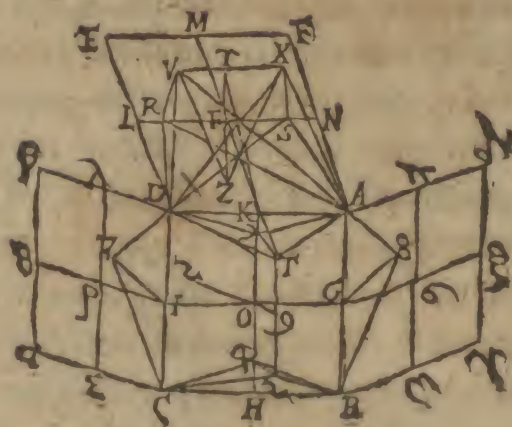


8. IV.

Sit una basis cubi, data sphaera comprehensi, quadratum $abcd$ cui aliud æquale ad angulos rectos insistat $adef$ quorum communis sectio sit ad . Divisis cunctis lateribus bifariam in g, h, i, k, l, m, n , punctis, ijsq; connexis & secantibus se rectis in punctis o, p , secantur ok, pl, pn , extremâ & mediaratione in punctis q, r, s ex quibus ad plana quadratorum educantur extra cubum perpendiculares qt, ru, sx , æquales segmentis majoribus oq, pr, ps , & conjungantur rectis at, ax, dt, du, ux . Erit $atdux$, unum ex duodecim pentagonis æquilateris & æquiangularibus dodecaedri constituendi. Esse hoc in uno plano constat. Quia cum ru, sx , ad quadratum

quadratum $adef$, sint rectæ & parallele & æquales
 tanquam æqualium segmenta eadem: & Erunt et
 iam rs & ux illæ connectentes æquales & parallele.
 Et quia ad , rs , etiam æquales rectas parallelas
 an , dl connectentes, sunt parallele; & erunt &
 ad , ux parallele, & hæ connectentes ax , du , in
 eodem cum ipsis plano. Et sic Trapezium $adux$
 in uno est plano. Sed quia & triangulum atd in
 uno est plano; erit etiam in eodem cum trapezio.
 Ducta enim py , perpendiculari parallela ipsi ru ;
 connectantur kt , ky . Quoniam est, ut ok ad oq ;
 Ita oq ad qk : & kp æqualis est ipsi ok . Quia
 laterum cubi sunt dimidia, & py ipsi oq , id est,
 ru : erit etiam ut kp ad py , ita oq , id est, qt ,
 ad qk . Quare cum triangula pk , qk duo latera
 duobus, circum angulis conjunctis, proportionalia
 habeant; latera pk , qk , homologa & parallela,
 quia utrumq; est rectum ad quadratum $abcd$: &
 py , qk , parallela, quia utrumq; est rectum ad
 quadratum $adef$: & erunt reliqua latera ky , kt ,
 in eandem rectam collocata, Et recta ty , in uno
 erit plano, & sic plana adt , & $adux$, unum
 sunt planum per rectas ad , ty ductum. Est ergo
 pentagonum atd in eodem plano. Sed & æ-
 quilaterum esse ita patet. Triangula enim re-
 ctangula ans , akq , duorum æqualium la-
 terum an , ns ipsis ak , kq ; etiam bases as , aq
 habent æquales.

Rursus



- Rursus triangula rectangula asx , $aq t$, duorū equaliū laterum as , sx , ipsis aq , qt , (quia sx , qt equalium eadem sunt segmenta) etiam bases ax , at aequales θ habent. Idemq; in triangulis dqt , dru , ostenderetur de lateribus td , du , quod equalia sint ipsi at . Erunt ergo 4. pentagonilatera equalia, quibus equale etiam ostendetur
4. I. ux . & quadrata rectarum pn , ns , simul sunt tripla quadrati ps vel sx . Sed quadrato recte pn equale est quadratum recte an . Igitur & quadrata an , ns simul sunt tripla quadrati sx ; & illis equale quadratum as ejusdem quadrati sx triplum: & quadrata as , sx simul quadrupla quadrati sx : & sic eisdem equale λ quadratum ax
4. XIII. quadruplum quadrati sx , id est, quadrati ps vel sy . Sed quia dupla ipsius xy , id est xu ; Quadratum etiam est γ quadruplum. Erunt quadrata ax , xu equalia, ipsaq; recte aequales; cui ax cum & reliq;

Reliqua tria $a r$, $t d$ du sint equalia; Erit pentagonū
 at $d u x$ equilaterum. Est verò & equiangulum.
 Ductis enim $a r$, $a u$, cum p n sit in s secta media & per scho-
 extremā ratione, eiq; addit $a p$ r equalis majori se- 4. II.
 mēto $p s$; & erit quoq; $n r$ secta in p extrema & me- 3. X III;
 dia ratione, majusq; segmentum n p. Erunt igitur
 quadrata rectarum $n r$, $r p$. simul tripla qua-
 drati n p, id est, $a n$. Est autem quadratum $r u$ a-
 quale quadrato $r p$. Ideoq; $n r$, $r u$ etiam simul sunt
 tripla quadrati $a n$; & proinde quadrata $n r$, $r u$,
 $a n$, quadrupla sunt ejusdem quadrati $a n$. Sunt au-
 tem quadrata $n r$, $a n$ equalia quadrato $a r$. Igi-
 tur & $a r$; $r u$ quadrupla sunt quadrati $a n$, & il-
 lis a equale quadratum $a u$, quadruplum recte $a n$.
 Cumq; ejusdē $a n$ dupla ad quadratū sit etiā qua-
 druplū quadrati $a n$. Igitur quadrata $a d$, $a u$ sunt
 equalia ipsaq; recte equales. Eodemq; modo $d x$,
 ad sunt equales; & sic tres $a d$, $a u$, $d x$, sunt equa-
 les. Iam in triangulis $t a d$, & $d u x$, equalium
 laterum ejusdem pentagoni, & basium $a d$, $d x$;
 erunt & anguli $a t d$, $d u x$ equales. Eidemq; 8. I.
 $d u x$ equalis $a x u$. Proinde, cum tres pentagoni
 equilateri anguli sint equales, erunt omnes in- 7. XIII;
 ter se equales. Et sic pentagonum equilaterum
 & equiangulum. Quod si sumantur alia duo cubi
 quadrata $c a p d$, $b v d a$, recta ad quadratum a
 $b c d$, quorum singula latera secantur bifariam
 in e , h , i , u , & g punctis, quae jungantur rectis
 secantibus

secantibus se mutuo in centrīs quadratorum e, σ .
 Secentur jam $oh, ok, ei, \sigma g$, extrema & me-
 dia ratione in punctis $\phi, q, 3, 4$, ex quibus plana
 quadratorum ad partes cubi exteriores perpendi-
 culares $\phi 2, qt, 3 7, 4 8$ aequales segmentis ma-
 joribus $\phi o, q o, 3 e, 4 \sigma$, junganturque
 $tz, 2 c, c 7, 7 d, dt, ta, a 8, 8 b, b 2$: eo-
 demq; modo ostendentur pentagona $t 2 c 7 d$ &
 $t 2 b 8 a$, esse aequilatera & equiangulara & a-
 equalia priori ob latera communia td, ta . Et
 sic habent tria pentagona tangencia cubi tria la-
 tera ad, dc, ab , sibiq; mutuo coherentia late-
 ribus communibus td, ta .

Qua methodo alia novem sunt fabricanda
 pentagona similia tangencia reliqua novem cu-
 bilatera, & habebitur sphaera comprehensura
 Dodecaedrum.

Iam intelligantur plana cubi opposita se-
 tari planis $adef, abcd$, per rectas pla-
 norum latera bifariam secantes km & ln, gi
 & hk ductis.

§ 19. XI. Haec plana secantia cum sint recta ad pla-
 na cubi, utpote parallela basibus cubi, rectis ad
 plana $adef, abcd$; e , erunt & sectiones
 eorum communes ad cubi plana rectae.

Ideoque

Ideoq, cum yp sit recta ad planum $adef$, ipsa versus z producta erit communis sectio planorum per rectas km, ln ductorum.

Ita, si ex o ad planum $abcd$ erigatur perpendicularis goz : Erit ipsa communis sectio planorum per rectas gi, hk , ductorum. Sed quia dictæ omnes sectiones & diametri cubi se mutuò bisariam secant σ : Secent se in z ; & bisariam sese diametri cubi secant τ in centro sphaerae cubum complectentis.

σ 19. XI.
 τ cor. 1. 15
XIII.

Erit igitur z centrum sphaerae circa cubum descriptæ, & omnes lineæ z , ad omnes angulos cubi erunt æquales.

Sed & ad omnes angulos Dodecaedri ex z ductæ rectæ erunt iisdem omnes æquales.

Ducta enim zx : quoniam parallela β sunt k, p, oz , cum utraque sit recta ad planum $abcd$:

Itemq, & ok, zp tanquam rectæ ad planum $adef$: erit pk, oz (quia duo z conjuncta debent intelligi) parallelogrammum, & pz æqualis ko , vel np , dimidio lateri cubi.

Est autem py , ipsi pr : æqualis, tota ergò zy , toti nr æqualis erit.

Quare

Quare cum quadrata nr, pr , simul sint tripla
 quadrati np , quod nr in p media & extrema ra-
 tione est secta; erunt etiam quadrata
 zy, py ; id est, zy, xy . simul tripla qua-
 drati ps , quia xy , equalis est ipsi ps vel py . Sed
 quadratis zy, xy , λ aequale est quadratum zx :
 Erit igitur & hoc triplum quadrati $z p$, id est, qua-
 drati dimidij lateris cubi; cujus etiam triplum est
 quadratum semidiametri sphaerae cubum compre-
 hendentis (ut ϕ enim diameter ad latus cubi: Ita
 semidiameter ad dimidium cubi. Ideoque ϕ ut qua-
 dratum diametri, ad quadratum lateris cubi, ita
 quadratum semidiametri ad quadratum dimidij la-
 teris. Cum ergo quadratum diametri sit triplum
 quadrati lateris; erit & semidiametri quadratum
 triplum quadrati dimidij lateris.) Erit itaque qua-
 dratum zx , quadrato semidiametri sphaerae seu
 cubi aequale: Ipsa quoque zx , equalis semidiametro. E-
 idem semidiametro & zu , quia zu & zx rectan-
 gulorum aequilaterorum zyx ; & zyu bases sunt;
 est θ equalis: cumque & za, zd , ad angulos cubi;
 semidiametro sphaerae sint aequales, ut antea dictum.
 erunt jam ex centro z , ad 4. angulos pentagoni $a,$
 d, u, x , aequales semidiametro sphaerae. Sed quod
 eidem semidiametro equalis etiam sit zt , ad an-
 gulum t , quintum, ita patet; si circa pentagonum
 aequilaterum illud describatur circulus at dux ;
 in cujus planum ex z centro sphaerae demittatur per-
 pendiculus

pendicularis $\zeta \omega$. & ω connectatur cum a, t, d, u, x punctis. Quoniam quadratum ζa aequale est quadratis $z \omega, \omega a$; & quadratum $z x$, aequale quadratis $z \omega, \omega x$; erunt, subtracto communi quadrato $z \omega$, ex quadratis aequalium rectarum $z a, z x$,



aequalia quadrata $\omega a, \omega x$; ipseque rectae $z a, z x$ aequales.

Nec aliter rectae $\omega u, \omega d$, & inter se & ipsis $\omega a, \omega x$ aequales sunt, quia $z u, z d$ sunt ostense aequales. Cum ergo ex ω plures duabus aequales cadant in periphe-

riam; x erit ω centrum circuli. Ideoque ωt , reliquis x 9. III.

ex centro aequalis erit, & quadrata $z \omega, \omega t$, aequalia quadratis $z \omega, \omega a$, efficient aequales $zt, z a$. Ex z igitur centro sphaera descripta complectens cubum, comprehendit etiam pentagonum $a t d u x$. Eodemque modo & omnia dodecaedri latera, adeoque & sphaera eadem comprehenduntur cubus & dodecaedrum.

Denique cum sit, ut $n p$ ad $p s$; ita $p s$ ad $s n$. Erit quoque, ut $n l$ dupla ipsius $n p$, ad $r s$ duplam ipsius $p s$; ita $r s$ ad compositum ex $b n, r l$, seu duplam ipsius $s n$. Si igitur latus cubi $n l$ secetur extrema & media ratione, majus segmentum erit $r s$; sed $n l$ tota ita secta, est Rationalis, cum ipsius quadratum quadrato diametri sphaerae Rationalis sit commensurabile, tanquam hujus pars tertia. Majus igitur segmentum $s r$, id est, latus dodecaedri $x u$, illi

□ □

aequalis

*equale, Irrationalis est linea, quæ vocatur A-
potome.*

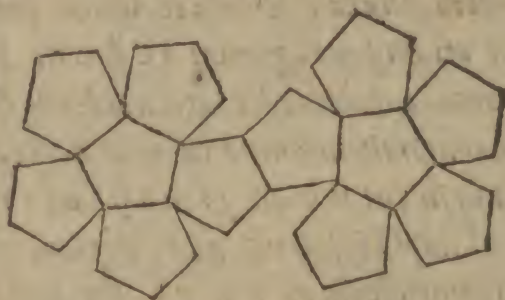
Corollarium.

*Si latus cubi secetur extrema &
media ratione, majus segmentum
est latus Dodecaedri in eadem
sphaera descripti.*

*Recta enim l n, æqualis lateri cubi, secta extre-
ma & media ratione, majus segmentum habet
r s latus dodecaedri.*

Scholium.

*Si duodecim Pentagona hoc modo di-
sponantur æquiangula & æquilatera;
componetur ex illis dodecaedrum secun-
dum totam soliditatem.*

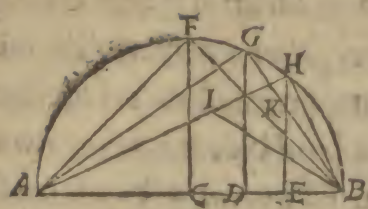


PROPOSITIO XVIII.

Problema 6.

*Latera quinque figurarum expo-
nere, & inter se comparare.*

Diame-



Diameter a b secetur
bisariam in c, & ab-
scindantur b d, pars
tertia, & b e pars
quinta diametri; su-
perq; a b describatur

semicirculus, & erigantur perpendiculares c f, d g,
e h; connectanturq; f g h, cum a & b. Hinc ex
a h absindatur equalis lateri decagoni h i, cuius se-
midiameter seu latus hexagoni est b h: & conne-
ctantur b i. Deniq; b g secetur media & extrema
ratione in k, ut b k sit segmensum majus: erit a g
latus pyramidis, vel Tetraedri: a f latus Octaedri;
b g latus cubi; b i latus Icosaedri, b k latus Dode-
caedri. Quia a enim a g est media proportionalis
inter b a, a d; & erit, ut b a ad a d, ita quadra-
tum a b ad quadratum a g. Est autem a b ad a d
sesquialtera: Igitur & quadratum a b, quadrati
a g sesquialterum erit. Et sic a g est latus Tetra-
edri, cuius lateris est sesquialtera potentia diame-
ter. Rursus quoniam a f est media proportionalis
inter b a, a c; erit rursus, ut b a ad a c, ita
quadratum b a, ad quadratum a f. Est autem
b a dupla ipsius a c: Igitur & quadratum a b,
quadrati a f. Et sic a f est latus octaedri, quippe
diameter est potentia dupla lateris octaedri. Oc-
cip. d 14. XIII.
de cum b g a sit media proportionalis inter a b,
b d; & erit, ut a b ad b d, ita quadratum a b ad
quadratum b g. Est autem a b tripla ipsius b d:

O o 2

Ergo

15. XIII. Ergo & quadratum ab quadrati bg : & sic bg
 latus cubi; quia diameter sphaerae potentia est tri-
 pla lateris cubi. Postea proportionales & etiam sunt
 ab, bh, bc ; & estq; ut ab ad bc , ita quadratum
 ab ad quadratum bc . Est autem ab quintupla
 ipsius bc : Ergo & quadratum ab quadrati bc .
 Cum igitur diameter sphaerae potentia sit quintupla
 semidiametri circuli quinq; latera Icosaedri am-
 bientis, erit bh dicti circuli semidiameter, vel la-
 tus hexagoni. Est autem hi latus decagoni ejusdem
 circuli. Ideoq; bi potens & latus hexagoni bh &
 decagoni hi , erit & latus pentagoni ejusdem circuli,
 Et sic bi latus Icosaedri. Deniq; cum bg latus cu-
 bi sit extrema & media ratione sectum in k , & erit
 bk segmentum majus latus dodecaedri. Quinq;
 ergo figurarum regularium latera sunt exposita.
 Comparatio eorundem sic habet: Quoniam dia-
 meter sphaerae est potentia sesquialtera lateris py-
 ramidis: & potentia dupla lateris octaedri; &
 potentia tripla lateris cubi; erunt partium talium
 quadrata laterum Tetraedri 4, Octaedri trium,
 Cubi duarum, qualium diameter est sex. Proin-
 deq; latus Tetraedri ad latus Octaedri potentia
 sesquiterium est: Et ad latus Cubi potentia du-
 plum. Latus autem Octaedri ad latus Cubi poten-
 tia sesquialterum. Harum ergo figurarum laterum
 quadrata & diametri sphaerae sunt inter se ut nu-
 merus ad numerum. Ideoq; sunt lineae inter se
 commen-

Commensurabiles. Et propter diametrum Ra-
 tionalem reliquæ etiam rationales sunt, Cumq;
 non sint ut numerus quadratus ad quadratum, corol. 25.
 & nec erunt longitudine commensurabiles. Et sic VII.
 Rationales potentia solum commensurabiles. At
 verò latera Icosædri & Dodecædri, quoniam sunt
 lineæ Irrationales, illud Minor, hoc Apotome, nec
 longitudine nec potentia productis sunt commen-
 surabiles. Si enim essent lateribus tribus prioribus
 commensurabiles, quæ diametro Rationali sunt
 commensurabilia, essent ipsæ quoq; Rationales
 quod absurdum, quia sunt Irrationales. Sed nec
 inter se sunt commensurabilia latera Icosædri &
 Dodecædri. Si enim longitudine inter se essent
 commensurabilia, Essent utraq; ejusdem speciei
 vel Minores vel Apotomæ. Si autem solum potentia, 104. X.
 eodem modo latus dodecædri erit Minor; quia
 Icosædri latus est Minor e. Quod absurdum, 106. X.
 quia nullæ Irrationales specie differentes, eadem 16. XIII.
 sunt. Quanquam itaq; trium priorum quidem 102. X.
 figurarum latera tum inter se, tum ipsi diametro
 sphaera sunt commensurabilia & Rationalia: duo
 verò posteriora iisdem & diametro & inter se in-
 commensurabilia & Irrationalia: Inter eas ta-
 men figuras occurrit hic ordo, ut eodem ordine se
 excedant earum latera, quo ipsis construximus.
 Quanquam eum ordinem in definitionibus, non ob-
 servavit Euclides. Majus enim est latus Tetrae-
 dri a g, latere Octædri a f: quia majorem sub-
 tendit

- tendit arcum: Et hoc majus τ latere cubi $b g$. cu-
 τ 18. III. bi autem latius majus esse latere Icosaedri ita patet.
 ϕ 20. VI. Quoniam $a b$ ponitur tripla ipsius $b d$, ν erit pro-
 pter duplicatam quadratorum rationem quadra-
 tum $a b$, nuncuplum quadrati $b d$; quia nuncupla
 est duplicata tripla. Propterea, qualium partium
 quadratum est novem, talium unum habet $b d$.
 Earundem autem est quadratum $b g$ trium, quod
 illud hujus sit ϕ triplum. Erunt igitur quadra-
 ϕ 15. XIII. ta $g d$ & $d b$, etiam talium trium: sublatog₃
 quadrato $b d$, unius; erit $d g$ talium duarum.
 Sed quia quadratum $a b$ est quintuplum quadrati
 $b h$, χ erit hoc minus quam talium z ; quia 9 ad 2
 z 10. V. minorem quintupla habent proportionem. Ideog₃
 quadratum $g d$ majus est quadrato $b h$, & $g b$
 major quam $b h$. Rursus quia diameter sphaerae
 ψ componitur ex $b h$ semi diametro circuli, ex quo
 ψ corol. 2. Icosaedrum constituitur, & duplo decagoni $h i$:
 ϕ 16. XIII. Erit latus decagoni $h i$ minus tertia parte $b d$ dia-
 metri $a b$. Si enim credatur equalis ipsi $b d$, tum
 duplum decagoni esset equale ipsi $a d$, & $h b$ ipsi
 $d b$. Ideog₃ quadratum $a b$ nuncuplum quadrati
 $b d$, erit etiam nuncuplum quadrati $b h$, cujus
 modo erat quintuplū. Non ergo est $h i$ tertia pars
 ipsius $a b$. Sed neq₃ major. Si n. ducatur major ter-
 tia parte $b d$ erit etiā ipsius dupla major dupla par-
 tis tertiae $a d$. Et sic $b h$ erit minor parte tertia $a d$.
 Adeog₃ quadratum $a b$, majus quam nuncuplum
 quadrati $b d$; quod magis est absurdum. Cum
 ergo

ergo hi nec equalis sit nec major tertiaparte, erit
 necessario minor. Itaque cum gd , db sint majores
 rectis bh , hi , ut ostensum est: erunt etiam ipsa-
 rum quadrata majora, harum quadratis. sed qua-
 dratum rectae bg est $\frac{1}{2}$ aequale quadratis gd , db ; &
 quadratum bi aequale quadratis bh , hi . Ergo qua-
 dratum bg majus erit quadrato bi ; latus cubi latere
 Icosaedri. Denique Icosaedri latus bi majus est latere
 Dodecaedri bk , quod est segmentum majus linea bg
 extrema & media ratione secta. Est enim rectan-
 gulum sub bg , bk majus rectangulo sub bg , kg a-
 deoque rectangula sub bg , bk & sub bg , gk si-
 mul, id est, ω quadratum bg , majora sunt duplo
 rectanguli sub bg , gk , id est, Δ quadrato bk bis.
 (quia bg , bk , gk sunt proportionales, & quadra-
 tum bk , aequale est rectangulo sub bg , gk .) Idcirco
 majora erunt tria quadrata rectae bg , sex quadra-
 tis rectae bk ; sed tribus quadratis bg aequalia sunt
 5. Quadrata bh . (quia quadratum ab tam est
 triplum quadrati gb , quam quintuplum quadrati
 bh) unumque quadratum bg majus erit uno qua-
 drato bh . (si enim esset aequale quadratum bh ,
 quadrato bk , vel minus; 5 quadrata bh essent
 minora sex quadratis bk , quibus tamen majora
 sunt ostensa.) Et recta bh major, quam recta bk :
 cumque bi major sit quam bh ; erit etiam major
 quam bk , latus Icosaedri latere Dodecaedri. Ex-
 posita itaque sunt latera quinque figurarum & inter
 se comparata. Quod erat faciendum.

F I N I S.

*Correctiones Erratorum ex-
tantiorum.*

Pag.	Lin.	Errata	Correctiones.
4	5	nea	linea
16	23	ada	a d c
33	11	ex	&
	12	abc	totus a b c
27	12	p f	d f
40	12	idemq; e c b	deniq; e b
42	15	punt	fiunt
	18	fila a c	pla a e
45	8	ad b g	a vel b g
59	in marg.	g. 47. I.	7 2. ax.
69	penult.	in marg. omif.	a. 12. III.
113	17	& g	h g
137	19	prout	praxis
164	7	ante o q omif.	am, quod deficit parallelogrammo.
165	9	inversa	inventa
218	penult.	denominatas	denominantur
227	15	Ergo f non ex	deleantur
277	14	per	qui
333	9	numero	modo
338	in marg.	§ 33 Xl.	33. III.
362	25	quartus	in 49
364	ult.	habeatur	habeatve
415	11	e f	ex
428	19	faciunt	facienti
443	penult.	a h a d h e	ad h g
469	6	a e	b c
470	9	b d, a g	b g, ad
497	13	erunt & i f	& c d & i f
506	in marg. omif.		a 33. Xl.

